

**MITTEILUNGEN DES INSTITUTS FÜR STATIK  
DER UNIVERSITÄT HANNOVER**

Herausgegeben von Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. H. Rothert

Lutz Nasdala

**Ein viskoelastisches Schädigungsgesetz  
für den stationär rollenden Reifen**

Mitteilung Nr. 50-00

Hannover, Mai 2000

# **Ein viskoelastisches Schädigungsgesetz für den stationär rollenden Reifen**

Vom Fachbereich Bauingenieur- und Vermessungswesen  
der Universität Hannover  
zur Erlangung des Grades  
**Doktor-Ingenieur**  
genehmigte Dissertation

von  
Dipl.-Ing. Lutz Nasdala

2000

Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. H. Rothert, Universität Hannover  
Korreferenten: Prof. Dr.-Ing. D. Besdo, Universität Hannover  
PD Dr. Ing. habil. M. Kaliske, M.Sc., Continental AG Hannover

Tag der Einreichung: 18.01.2000  
Tag der mündlichen Prüfung: 04.05.2000

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1. Problemstellung . . . . .	1
1.2. Stand der Forschung . . . . .	2
1.2.1. Transiente Reifenmodelle . . . . .	2
1.2.2. Stationäre Reifenmodelle . . . . .	5
1.3. Ziele und Umfang der eigenen Arbeit . . . . .	6
<b>2. Kontinuumsmechanische Grundlagen</b>	<b>9</b>
2.1. Referenz- und Momentankonfiguration . . . . .	9
2.2. Verzerrungsmaße . . . . .	12
2.2.1. Der materielle Deformationsgradient . . . . .	12
2.2.2. Verzerrungstensoren . . . . .	14
2.3. Spannungstensoren . . . . .	15
2.4. Zeitliche Ableitungen . . . . .	16
2.5. Doyle-Ericksen-Formeln . . . . .	18
2.6. Bilanzgleichungen . . . . .	19
2.6.1. Massenbilanz . . . . .	19
2.6.2. Impulsbilanz . . . . .	20
2.6.3. Drehimpulsbilanz . . . . .	20
2.6.4. Energiebilanz . . . . .	21
2.6.5. Entropiebilanz . . . . .	22
2.7. Prinzip der virtuellen Arbeit . . . . .	24
<b>3. Konstitutive Gleichungen</b>	<b>27</b>
3.1. Transiente Berechnung . . . . .	27
3.1.1. Elastizität . . . . .	28
3.1.2. Viskoelastizität . . . . .	34
3.1.3. Schädigung . . . . .	37
3.1.4. Viskoelastizität mit Schädigung . . . . .	51
3.2. Stationäre Berechnung . . . . .	53
3.2.1. Viskoelastizität . . . . .	55
3.2.2. Schädigung . . . . .	58
3.2.3. Viskoelastizität mit Schädigung . . . . .	60

<b>4. Linearisierung des Prinzips der virtuellen Arbeit</b>	<b>63</b>
4.1. Grundlagen der konsistenten Linearisierung	63
4.2. Transiente Berechnung	67
4.2.1. Volumetrischer Anteil der inneren Arbeit	67
4.2.2. Isochorer Anteil der inneren Arbeit	69
4.2.3. Äußere Arbeit	71
4.3. Stationäre Berechnung	72
4.3.1. Isochorer Anteil der inneren Arbeit	72
4.3.2. Äußere Arbeit	78
<b>5. Finite Elemente Diskretisierung</b>	<b>83</b>
5.1. Grundlagen der Finite Elemente Methode	83
5.2. Transiente Berechnung	87
5.2.1. Prinzip der virtuellen Arbeit	87
5.2.2. Linearisierter volumetrischer Anteil der inneren Arbeit	88
5.2.3. Linearisierter isochorer Anteil der inneren Arbeit	90
5.2.4. Linearisierte äußere Arbeit	90
5.2.5. Assemblierung	91
5.3. Stationäre Berechnung	92
5.3.1. Prinzip der virtuellen Arbeit	92
5.3.2. Ringinformationen	93
5.3.3. Numerische Integration	96
5.3.4. Linearisierter isochorer Anteil der inneren Arbeit	97
5.3.5. Linearisierte äußere Arbeit	98
5.3.6. Assemblierung	99
5.3.7. Ablauf einer stationären Finite Elemente Reifenberechnung	102
<b>6. Parameteridentifikation</b>	<b>105</b>
6.1. Evolutionsstrategie	105
6.1.1. Optimierungsproblem	106
6.1.2. Generation	106
6.1.3. Zeugung	106
6.1.4. Selektion	110
6.2. Ermittlung der viskoelastischen Materialparameter	110
6.2.1. Kopplung von Maxwell-Elementen	110
6.2.2. Zyklische Zug-Druck-Versuche	112
6.2.3. Dynamische Steifigkeiten	120
6.2.4. Wichtungsfunktionen	127
6.3. Ermittlung der Schädigungsparameter	129

<b>7. Numerische Beispiele</b>	<b>135</b>
7.1. Scheibe mit Loch . . . . .	135
7.2. Vergleich von transienter und stationärer Berechnung . . . . .	137
7.2.1. Einfluß der Masse . . . . .	137
7.2.2. Einleitung der Kontaktkraft . . . . .	142
7.2.3. Stationärer Grenzzustand . . . . .	143
7.2.4. Numerischer Aufwand . . . . .	144
7.3. Stationäre Reifenberechnungen . . . . .	146
7.3.1. Betriebswachstum . . . . .	148
7.3.2. Energiedissipation . . . . .	150
7.3.3. Konvergenzverhalten . . . . .	151
<b>8. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>153</b>
8.1. Zusammenfassung . . . . .	153
8.1.1. Transiente Berechnung . . . . .	153
8.1.2. Stationäre Berechnung . . . . .	155
8.2. Ausblick . . . . .	156
<b>A. Spezielle Tensoren und Operatoren</b>	<b>157</b>
A.1. Gradient . . . . .	157
A.2. Divergenz . . . . .	157
A.3. Deviator . . . . .	158
A.4. Materialtensor . . . . .	158
A.5. Transposition, Spur, Skalarprodukt . . . . .	159
<b>Literatur</b>	<b>161</b>
<b>Lebenslauf</b>	<b>173</b>
<b>Mitteilungen des Instituts für Statik der Universität Hannover</b>	<b>175</b>