

---

# Allgemeine Topologie

Theorie und Anwendung

**SEYMOUR LIPSCHUTZ, Ph. D.**

*Associate Professor of Mathematics*

*Temple University*

*Übersetzung und deutsche Bearbeitung:*

*Dipl.-Math. Wolfgang Dolejsky*

*Darmstadt*



**McGraw-Hill Book Company Europe**

London · New York · St. Louis · San Francisco · Auckland · Bogotá  
Guatemala · Hamburg · Lissabon · Madrid · Mailand · Mexiko · Montreal  
Neu Delhi · Paris · San Juan · São Paulo · Singapur · Sydney · Tokio · Toronto

# Inhaltsverzeichnis

<b>Kapitel 1</b>	<b>MENGEN UND RELATIONEN</b> . . . . .	<b>1</b>
	Mengen, Teilmengen. Mengenverknüpfungen. Produktmengen. Relationen. Äquivalenzrelationen. Zusammengesetzte Relationen.	
<hr/>		
<b>Kapitel 2</b>	<b>FUNKTIONEN</b> . . . . .	<b>17</b>
	Funktionen. Injektive, surjektive, bijektive Funktionen, Umkehrfunktionen und identische Funktionen. Indizierte Mengen, kartesisches Produkt. Verallgemeinerte Verknüpfungen. Zugeordnete Mengenfunktionen. Rechenregeln für reellwertige Funktionen.	
<hr/>		
<b>Kapitel 3</b>	<b>KARDINALZAHLEN, ORDNUNGEN</b> . . . . .	<b>32</b>
	Äquivalente Mengen. Abzählbare Mengen. Das Kontinuum. Satz von Schroeder-Bernstein. Kardinalzahlen. Satz von Cantor und die Kontinuumshypothese. Geordnete Mengen. Teilmengen geordneter Mengen. Erste und letzte Elemente. Maximale und minimale Elemente. Obere und untere Schranken. Das Zornsche Lemma.	
<hr/>		
<b>Kapitel 4</b>	<b>TOPOLOGIE DER GERADEN UND DER EBENE</b> . . . . .	<b>47</b>
	Die reelle Zahlengerade. Offene Mengen. Häufungspunkte. Satz von Bolzano-Weierstrass. Abgeschlossene Mengen. Satz von Heine-Borel. Folgen. Konvergente Folgen. Teilfolgen, Cauchy Folgen. Vollständigkeit. Stetige Funktionen. Topologie der Ebene.	
<hr/>		
<b>Kapitel 5</b>	<b>TOPOLOGISCHE RÄUME: DEFINITIONEN</b> . . . . .	<b>66</b>
	Topologische Räume. Häufungspunkte. Abgeschlossene Mengen. Die abgeschlossene Hülle einer Menge. Das Innere, das Äußere, der Rand. Umgebungen und Umgebungs- systeme. Konvergente Folgen. Gröbere und feinere Topologien. Teilräume, Relativ- topologien. Äquivalente Definitionen für topologische Strukturen.	
<hr/>		
<b>Kapitel 6</b>	<b>BASEN UND SUBBASEN</b> . . . . .	<b>87</b>
	Basen einer Topologie. Subbasen. Von Mengensystemen erzeugte Topologien. Lokale Basen.	
<hr/>		
<b>Kapitel 7</b>	<b>STETIGKEIT UND HOMÖOMORPHE RÄUME</b> . . . . .	<b>97</b>
	Stetige Funktionen. Stetige Funktionen und Berührungspunkte. Stetigkeit in einem Punkt. Folgenstetigkeit in einem Punkt. Offene und abgeschlossene Funktionen. Homöomorphe Räume. Topologische Invarianten. Durch Funktionen induzierte Topologien.	
<hr/>		
<b>Kapitel 8</b>	<b>METRISCHE UND NORMIERTE RÄUME</b> . . . . .	<b>111</b>
	Metriken. Der Abstand zwischen Mengen, Durchmesser. Offene Kugeln. Metrische Räume. Eigenschaften metrischer Räume. Äquivalente Metriken. Das Metrisationsproblem. Isometrische Räume. Der $m$ -dimensionale euklidische Raum. Der Hilbertsche Folgen- raum. Konvergenz und Stetigkeit in metrischen Räumen. Normierte Räume.	
<hr/>		

Kapitel 9	<b>ABZÄHLBARKEITSEIGENSCHAFTEN</b> . . . . .	131
	Das erste Abzählbarkeitsaxiom. Das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Satz von Lindelöf. Separable Räume. Vererbbarkeit von Eigenschaften auf Unterräume.	
<hr/>		
Kapitel 10	<b>TRENNUNGSEIGENSCHAFTEN</b> . . . . .	139
	$T_1$ -Räume. Hausdorff Räume. Reguläre Räume. Normale Räume. Das Urysohnsche Lemma und der erste Metrisationssatz von Urysohn. Punkttrennende Funktionensysteme. Vollständig reguläre Räume.	
<hr/>		
Kapitel 11	<b>KOMPAKTHEITSBEGRIFFE</b> . . . . .	151
	Überdeckungen. Quasikompakte Mengen. Teilmengen quasikompakter Räume. Die endliche Durchschnittseigenschaft. Quasikompaktheit und Hausdorff Räume. Folgen- kompakte Mengen. Bolzano-Weierstrass-kompakte Mengen, abzählbar kompakte Mengen. Lokal quasikompakte und lokal kompakte Mengen. Kompaktifizierungen. Kompakt- heitsbegriffe in metrischen Räumen. Totalbeschränkte Mengen. Lebesguesche Zahl einer Überdeckung.	
<hr/>		
Kapitel 12	<b>PRODUKTRÄUME</b> . . . . .	167
	Das topologische Produkt. Basis der Produkttopologie endlich vieler Räume. Definierende Subbasis und definierende Basis der Produkttopologie. Produktsatz von Tychonoff. Das Produkt metrischer Räume. Das Cantorsche Diskontinuum.	
<hr/>		
Kapitel 13	<b>ZUSAMMENHANG</b> . . . . .	180
	Separierte Mengen. Zusammenhängende Mengen. Zusammenhängende Räume. Zusam- menhängende Mengen der reellen Achse. Zusammenhangskomponenten. Lokal zusam- menhängende Räume. Wege. Wegzusammenhängende Mengen. Homotope Wege. Einfach zusammenhängende Räume.	
<hr/>		
Kapitel 14	<b>VOLLSTÄNDIGE METRISCHE RÄUME</b> . . . . .	195
	Cauchy Folgen. Vollständige metrische Räume. Monoton fallende Folgen abgeschlossener Mengen. Vollständigkeit und kontrahierende Abbildungen. Vervollständigungen. Satz von Baire. Vollständigkeit und Kompaktheit.	
<hr/>		
Kapitel 15	<b>FUNKTIONENRÄUME</b> . . . . .	207
	Funktionenräume. Die punkt-offene Topologie. Punktweise Konvergenz. Gleichmäßige Konvergenz. Der Funktionenraum $C[0, 1]$ . Gleichmäßige Beschränktheit. Gleichgradige Stetigkeit. Satz von Ascoli. Kompakt-offene Topologie. Gleichmäßige Konvergenz auf kompakten Mengen. Funktionale auf normierten Räumen.	
<hr/>		
Anhang	<b>EIGENSCHAFTEN DER REELLEN ZAHLEN</b> . . . . .	225
	Körperaxiome. Die reelle Achse. Teilmengen von $\mathbf{R}$ . Angeordnete Körper. Der Betrag. Das Axiom von der kleinsten oberen Schranke. Das Prinzip der Intervallschachtelung.	
<hr/>		
	<b>SACHVERZEICHNIS</b> . . . . .	235
<hr/>		
	<b>SYMBOLS</b> . . . . .	240