

EINFÜHRUNG IN DIE GRUNDLAGEN DER QUANTENTHEORIE

von

PROF. DR. EUGEN FICK

LEHRSTUHL FÜR THEORETISCHE FESTKÖRPERPHYSIK
AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE DARMSTADT

MIT 95 FIGUREN IM TEXT

6. DURCHGESEHENE AUFLAGE



AULA-VERLAG WIESBADEN

Inhalt

Die mit Stern versehenen Abschnitte können bei der ersten Durchsicht übergangen werden.

Erster Teil

Klassische Behandlung der Materie: Teilchen- und Wellenvorstellung

Erstes Kapitel. Geschichtliche Entwicklung und grundlegende Experimente zur Dualität	19
§ 1. Die PLANCKSche Quantenhypothese	19
a) Die PLANCKSche Strahlungsformel	19
b) Die spezifische Wärme fester Körper	20
§ 2. Korpuskeleigenschaften der elektromagnetischen Strahlung	21
§ 3. Die BOHR-SOMMERFELDSche Theorie	24
a) Das RUTHERFORDSche Atommodell	24
b) Die BOHRSchen Postulate	24
c) Das Wasserstoffatom	25
d) Kritik	26
§ 4. Die Welleneigenschaften der Materie	27
a) Die DE BROGLIESchen Materiewellen	27
b) Die SCHRÖDINGERSche Materiewellengleichung	27
c) Die Dualität von Welle und Korpuskel	28
§ 5. Einige vorläufige Bemerkungen zur Bewältigung der Dualität durch die Quantentheorie	28
a) Die HEISENBERGSche Unschärferelation	28
b) Die Entwicklung der Quantentheorie	30
Zweites Kapitel. Das klassische Teilchenbild	31
§ 1. Das Wirkungsprinzip und die LAGRANGESchen Bewegungsgleichungen	31
§ 2. Die Wirkungsfunktion	34
*§ 3. Symmetrie und Erhaltungssätze	37
a) Das Theorem von E. NOETHER	37
b) Beispiele	39

§ 4. Die HAMILTONSche Formulierung der Mechanik.....	41
a) Die HAMILTONSchen Gleichungen	41
b) Die HAMILTON-JACOBISCHE Gleichung.....	42
c) Definition der POISSON-Klammern	43
d) Die Bewegungsgleichungen in POISSON-Klammern.....	44
e) Erhaltungsgrößen	45
§ 5. Die Bewegung eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld	45
a) Das elektromagnetische Feld	45
b) Die LAGRANGE-Funktion eines Teilchens im elektromagnetischen Feld ...	46
c) Die HAMILTON-Funktion eines Teilchens im elektromagnetischen Feld ...	47
d) Das magnetische Moment	48
Drittes Kapitel. Das SCHRÖDINGERSche Materiefeld	49
§ 1. Die Bedeutung der Feldgleichungen der Materie	49
§ 2. Nichtrelativistische, kräftefreie Materiewellen	51
§ 3. Das Konzept zur Herleitung der SCHRÖDINGERSchen Materiefeldgleichung ..	54
§ 4. Das Materiefeld unter dem Einfluß eines Potentials	56
§ 5. Das Materiefeld unter dem Einfluß eines elektromagnetischen Feldes	58
§ 6. Übersetzungsschema für den Übergang vom Teilchen- zum Wellenbild	60
Viertes Kapitel. Die Observablen des SCHRÖDINGERSchen Materiefeldes	61
§ 1. Dichte und Strom des Materiefeldes	61
§ 2. Grenzbedingungen für das Materiefeld	63
§ 3. Energiedichte und Energieströmung des Materiefeldes	65
§ 4. Schwerpunkt, Impuls und Drehimpuls des Materiefeldes	66
Fünftes Kapitel. Lösungen der SCHRÖDINGERSchen Materiefeldgleichung	68
§ 1. Superposition stationärer Lösungen	68
§ 2. Die kräftefreie SCHRÖDINGERSche Feldgleichung	71
§ 3. Die kräftefreie Bewegung eines Materiefeldes	74
§ 4. Das allgemeine Verhalten eindimensionaler, stationärer Lösungen	77
a) Das Materiefeld unter dem Einfluß einer Potentialmulde	78
b) Das Materiefeld unter dem Einfluß eines Potentialberges	80
§ 5. Beispiel: Materiewelle in einem undurchdringlichen Kasten	81
§ 6. Die Eigenfunktionen der dreidimensionalen, zeitunabhängigen SCHRÖDINGER-Gleichung mit Potential	84
*§ 7. Entwicklung des Materiefeldes nach einem beliebigen, vollständigen, normierten Orthogonalsystem	86
a) Die zeitabhängigen Entwicklungskoeffizienten	86

b) Entwicklung der Observablen des Materiefeldes nach den Amplituden von Partialwellen	88
Sechstes Kapitel. Das Versagen des Wellenbildes der Materie	89
§ 1. Die elektromagnetische Selbstwechselwirkung eines geladenen Materiefeldes ..	89
§ 2. Feldgleichung und Teilchenzahl	91
*Siebentes Kapitel. Der LAGRANGE- und HAMILTON-Formalismus für Felder	92
§ 1. Die Feldgleichungen als LAGRANGESche Gleichungen	92
§ 2. Der kanonische Energie-Impulstensor	95
§ 3. Beispiel: Das SCHRÖDINGERSche Materiefeld	97
§ 4. Symmetrie und Erhaltungssätze eines Feldes	98
a) Allgemeine Formulierung	98
b) Beispiele	99
§ 5. Kanonische Feldgrößen und HAMILTON-Dichte eines Feldes	102
§ 6. Die integrale LAGRANGE- und HAMILTON-Funktion	104
§ 7. Formulierung in den Amplituden von Partialwellen	105
§ 8. Beispiel: Das SCHRÖDINGERSche Materiefeld	106
§ 9. Felder im POISSON-Klammer-Formalismus	108
a) Definition der POISSON-Klammern für Felder	108
b) Die Feldgleichungen in POISSON-Klammern	109

Zweiter Teil

Der unitäre Vektorraum

Vorbemerkung	110
Erstes Kapitel. Die Vektoren des unitären Raumes	111
§ 1. Linearität und Skalarprodukt	111
§ 2. Basisvektoren	112
§ 3. DIRACsche Vektoren	114
§ 4. Zusammenfassung in einheitlicher Schreibweise	117
§ 5. Skalarprodukt in Komponentenform	118
§ 6. Unitäre Basistransformationen	119
Zweites Kapitel. Lineare Operatoren	121
§ 1. Definition und Eigenschaften linearer Operatoren	121
§ 2. Dyadisches Produkt. Zerlegung des Einheitsoperators	125
§ 3. Matrixelemente eines Operators	126

§ 4. Lineare Operatoren mit speziellen Eigenschaften	128
a) Zueinander inverse Operatoren	128
b) Zueinander adjungierte Operatoren	129
c) HERMITESCHE Operatoren	130
d) Unitäre Operatoren	132
e) Projektionsoperatoren	132
Drittes Kapitel. Das Eigenwertproblem eines Operators	135
§ 1. Die Eigenwertgleichung	135
§ 2. Sätze über das Eigenwertproblem HERMITESCHER Operatoren	138
§ 3. Die \mathcal{L} -Darstellung des unitären Vektorraumes	140
§ 4. Die gemeinsamen Eigenvektoren vertauschbarer Operatoren	142
§ 5. Entartung	143
§ 6. Beispiel: Die Eigenwertgleichung von Projektionsoperatoren	145
§ 7. Das Eigenwertproblem transformierter Operatoren	146
§ 8. Differentiation der Eigenwertgleichung nach einem Parameter	146
Viertes Kapitel. Der Produktraum	147
§ 1. Die Vektoren des Produktraumes	147
§ 2. Operatoren im direkten Produktraum	149

Dritter Teil

Formulierung und Interpretation der Quantentheorie

Erstes Kapitel. Das Konzept der Quantentheorie	151
§ 1. Die Interpretation mikroskopischer Eigenschaften	151
§ 2. Der Einfluß der Meßapparatur	152
§ 3. Die Unschärferelationen	153
§ 4. Der Spaltversuch. Wahrscheinlichkeitsaussagen	154
Zweites Kapitel. Die Quantisierung	156
§ 1. Beschreibung der Observablen durch HERMITESCHE Operatoren	156
§ 2. Die Vertauschungsrelationen	159
§ 3. Die Observablen als Operatorfunktionen	160
a) Übersetzung klassischer Funktionen	160
b) Die Berechnung von Kommutatoren	162
c) Beispiel: Der Drehimpuls	163
d) Vektoroperatoren	164
§ 4. Analogien zum POISSON-Klammer-Formalismus der klassischen Physik	165

§ 5. Die Rolle der Zeit in der Quantentheorie	166
§ 6. Der Zusammenhang zwischen den Operatoren $\hat{\mathcal{L}}$ und \mathcal{L}	167
a) Die allgemeine Beziehung	167
b) Erstes Beispiel: Ein Teilchen in einem Potential	168
c) Zweites Beispiel: Ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld	169
§ 7. Unitäre Transformationen	172
a) Unitär-Äquivalenz	172
b) Bilder	172
c) Zeitabhängigkeit der HERMITESchen Operatoren in einem Bild	174
 Drittes Kapitel. Die statistischen Aussagen der Quantentheorie	175
§ 1. Definition von Wahrscheinlichkeit und Erwartungswert	175
§ 2. Zustandsvektor $ \Phi\rangle$ und Erwartungswert $\langle \mathcal{L} \rangle$	177
§ 3. Die Streuung einer Observablen	180
§ 4. Der Einfluß des Meßprozesses auf den Zustandsvektor	181
§ 5. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Meßwertes	184
§ 6. Die Verträglichkeit zweier Messungen	187
§ 7. Nichtverträgliche Observable	189
§ 8. Die Unschärferelationen	191
 Viertes Kapitel. Der unitäre Raum eines quantenmechanischen Systems	192
§ 1. Ein vollständiger Satz verträglicher Observabler	192
§ 2. Konstruktion des unitären Raumes \mathcal{U} eines physikalischen Systems	194
§ 3. Die Systemzusammensetzung	194
 Fünftes Kapitel. Die Bewegungsgleichungen in der Quantentheorie	197
§ 1. Die Problemstellung der quantentheoretischen Dynamik	197
§ 2. Der Operator $\hat{\mathcal{P}}_{ \Phi\rangle}$ und die Grundgleichungen der Dynamik	198
§ 3. Die quantentheoretischen Bewegungsgleichungen in einem beliebigen Bild ..	200
a) Die unitären Transformationen $\mathcal{A}(t, t_0)$ innerhalb eines Bildes	200
b) Die Festlegung der unitären Transformationen \mathcal{A} durch einen HERMITE-	
schen Operator \mathcal{H}	201
c) Die Differentialgleichungen der Bewegung	203
d) Die Bewegung des Zustandsvektors $ \Phi(t)\rangle$ als unitäre Transformation	205
e) Der unitäre Operator $\mathcal{U} = \mathcal{A}^\dagger \mathcal{C}$	206
f) Hinweis auf das Rechnen in einem bestimmten Bild	206
§ 4. Die Zeitabhängigkeit der Wahrscheinlichkeitsamplituden und Erwartungs-	
werte	207
a) Die SCHRÖDINGER-Gleichung für die Wahrscheinlichkeitsamplituden	207

b) Die Integration der SCHRÖDINGER-Gleichung durch die unitäre Transformation $\mathcal{U}(t, t_0)$	208
c) Das EHRENFESTSche Theorem	210
d) Die Energie-Zeit-Unschärferelation	211
§ 5. Der Zusammenhang zwischen zwei Bildern	212
§ 6. Die quantentheoretische Dynamik im SCHRÖDINGER-, HEISENBERG- und Wechselwirkungsbild	214
a) Definition und Bewegungsgleichungen der drei Bilder	214
b) Die Dynamik im SCHRÖDINGER-Bild	216
c) Die Dynamik im HEISENBERG-Bild	217
d) Die Dynamik im Wechselwirkungsbild (DIRAC, SCHWINGER, TOMONAGA) ..	219
§ 7. Die Integration der Operator-Differentialgleichung 1. Ordnung	222
§ 8. Die DIRACsche Störungstheorie	224
a) Allgemeine Formulierung	224
b) Zeitlich konstante Störung	227
§ 9. Lebensdauer und Linienbreite	231
Sechstes Kapitel. Symmetrien	233
§ 1. Übersicht	233
§ 2. Darstellung von Transformationen durch unitäre Operatoren	233
§ 3. Gruppeneigenschaften der Transformationen	236
§ 4. Symmetrie und Erhaltungsgrößen	237
§ 5. Translationen. Definition des Impulsoperators. Vertauschungsrelationen zwischen Ort und Impuls	240
§ 6. Drehungen	242
a) Drehoperatoren und Drehimpuls	242
b) Drehimpuls-Vertauschungsrelationen	243
*§ 7. Symmetrie und Entartung	245
a) Symmetrietransformationen von Eigenvektoren	245
b) Klassifikation der Eigenwerte nach irreduziblen Darstellungen der Symmetriegruppe	246
c) Systemzusammensetzung	248
d) Term aufspaltung durch Symmetrieverminderung	249
*§ 8. Auswahlregeln	249
Siebentes Kapitel. Quantentheorie bei unvollständiger Information über den Zustand des Systems	251
§ 1. Die Phasenraumdichte der klassischen statistischen Mechanik	251
§ 2. Quantentheorie eines Gemisches	253
a) Das Gemisch als inkohärente Überlagerung reiner Zustände	254
b) Der statistische Operator	255
c) Spezielle statistische Operatoren	257

§ 3. Der statistische Operator nach dem Meßprozeß 259
 a) Der statistische Operator nach Ablesung eines Meßwertes 259
 b) Der statistische Operator nach einer Messung, bei der vom Meßergebnis nicht Kenntnis genommen wird 261
 c) Der statistische Operator nach einer Messung, bei der vom Meßergebnis nur teilweise Kenntnis genommen wird 262
 § 4. Dynamik eines quantentheoretischen Gemisches 263

Vierter Teil

Durchführung der Theorie

Erstes Kapitel. Systeme mit Observablen, die nur von Ort und Impuls abhängen ... 268
 § 1. Ortsdarstellung eindimensionaler Probleme 268
 § 2. Eigenwertprobleme in der Ortsdarstellung 272
 § 3. Kontinuitätsgleichung, Stromoperator und Grenzbedingungen 273
 § 4. Impulsdarstellung eindimensionaler Probleme 275
 § 5. Der HAMILTON-Operator in der Impulsdarstellung, Beispiel: Teilchen unter dem Einfluß einer konstanten Kraft 277
 § 6. Orts- und Impulsdarstellung von Systemen mit mehreren äußeren Freiheitsgraden 278

Zweites Kapitel. Der harmonische Oszillator 280
 § 1. Der Operator ℓ 281
 § 2. Das Eigenwertproblem von \mathcal{H} bzw. $n = \ell^\dagger \ell$ 282
 § 3. Matrixelemente in der Energiedarstellung 285
 § 4. Oszillatoreigenfunktionen in der Ortsdarstellung 286

Drittes Kapitel. Quantentheorie des Drehimpulses 289
 § 1. Das Eigenwertproblem des Drehimpulses 289
 a) Vertauschungsrelationen 289
 b) Die Eigenwerte von $\vec{\mathcal{J}}^2$ und \mathcal{J}_z 291
 c) Die Wirkung von \mathcal{J}_\pm bzw. \mathcal{J}_x und \mathcal{J}_y auf $|u_J^M\rangle$ 294
 d) Die Wirkung der Drehoperatoren auf die Drehimpulseigenvektoren 296
 e) Der Aufbau des unitären Raumes aus Drehimpulseigenvektoren 297
 § 2. Der Bahndrehimpuls 298
 a) Die Ganzzahligkeit der Bahndrehimpulseigenwerte 298
 b) Der Bahndrehimpuls in der Ortsdarstellung 299
 § 3. Kugelsymmetrische HAMILTON-Operatoren 304

§ 4. Der Spin $s = 1/2$	307
§ 5. Das magnetische Moment	311
§ 6. Der Gesamtdrehimpuls eines Elektrons	313
a) Die Vertauschungsrelationen des Gesamtdrehimpulses \vec{J}	313
b) Die Gesamtdrehimpuls-Eigenzustände eines Elektrons. WIGNER-Koeffizienten	314
c) Die Spin-Bahn-Wechselwirkung	317
§ 7. Die Addition zweier beliebiger Drehimpulse	317
Viertes Kapitel. Permutationen	318
§ 1. Die Austauschentartung und ihre (teilweise) Aufhebung durch eine symmetrische Wechselwirkung	318
a) Zwei Teilsysteme	318
b) N Teilsysteme	322
§ 2. Permutationsoperatoren	323
a) Zwei Teilsysteme	324
b) N Teilsysteme	325
§ 3. Symmetrisierungs- und Antimetrisierungsoperator	326
Fünftes Kapitel. Identische Teilchen	328
§ 1. Die Ununterscheidbarkeit identischer Teilchen. Bosonen und Fermionen	328
§ 2. Der antimetrische Raum \mathfrak{U}_N^-	331
§ 3. Das PAULISCHE Ausschließungsprinzip	333
§ 4. Der unitäre Raum \mathfrak{U}^- variabler Fermionenzahl	333
§ 5. Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren von Fermionen	335
a) Definition	335
b) Vertauschungsrelationen	336
c) Das Transformationsverhalten der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren	337
§ 6. Entwicklung eines Operators nach Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren	338
a) Entwicklung einer Summe von Einteilchen-Operatoren	339
b) Besetzungszahl-Operatoren	342
c) Die FERMI-Verteilung	344
d) Die Bewegungsgleichung für ψ und α	345
e) Entwicklung von Wechselwirkungsoperatoren	346
f) Beispiel: Der HEISENBERGSche Austauschoperator	347
*Sechstes Kapitel. Das quantisierte SCHRÖDINGER-Feld	350
§ 1. Die Feldoperatoren	350
§ 2. Die Observablen des SCHRÖDINGERSchen Materiefeldes als Operatoren	352
a) Der HAMILTON-Operator	352
b) Die Operatoren von Impuls und Schwerpunkt des Feldes	352

§ 3. Vertauschungsrelation der Feldoperatoren	353
a) Feldquantisierung mittels Kommutatoren (BOSE-Feld)	353
b) Feldquantisierung mittels Antikommutatoren (FERMI-Feld)	353
c) Eine Folgerung für die integralen Observablen eines Feldes	355
§ 4. Die SCHRÖDINGERSche Materiefeldgleichung in Operatorform	356
§ 5. Teilchenzahl-Operatoren für Bosonen	357
a) Definition und Vertauschungsrelationen	357
b) Die Eigenwerte der Besetzungszahl-Operatoren	358
c) Die Eigenvektoren der Besetzungszahl-Operatoren. N -Darstellung des \mathfrak{U}^+	360
§ 6. Teilchenzahl-Operatoren für Fermionen	363
a) Ihre Eigenwerte	363
b) Die Fermionen-Erzeugungs- und -Vernichtungsoperatoren. N -Darstellung des \mathfrak{U}^-	364
§ 7. Die elektrostatische Selbstwechselwirkung eines quantisierten Materiefeldes ..	365
 Siebentes Kapitel. Quantentheorie der Streuprozesse	 366
§ 1. Die Dynamik des Streuprozesses	366
a) Formulierung des Problems	366
b) Mathematische Durchführung	368
§ 2. Bestimmung der Eigenvektoren $ u^{(+)}\rangle$ von \mathcal{H}	370
a) Die Integralgleichung der Streuung. Die Streuamplitude	370
b) Die BORNSche Näherung	374
c) Streuung am YUKAWA- und COULOMB-Potential	375
§ 3. Diskussion des gestreuten Wellenpaketes. Der Wirkungsquerschnitt	375
§ 4. Die Streumatrix. Das optische Theorem	378

Fünfter Teil

Anhang

Erstes Kapitel. Die DIRACSche δ -Funktion	382
§ 1. Definition der δ -Funktion	382
§ 2. Eigenschaften der δ -Funktion	385
§ 3. Ableitungen der δ -Funktion	387
§ 4. Die Sprungfunktion	388
§ 5. Der Hauptwert $P\left(\frac{1}{x}\right)$ und die δ_{\pm} -Funktionen	389
 *Zweites Kapitel. Funktional und Funktionalableitung	 391
§ 1. Der Begriff des Funktionals	391

§ 2. Die Funktionalableitung	392
a) Definition	392
b) Einige wichtige Funktionalableitungen	393
Drittes Kapitel. SCHRÖDINGERSche Störungstheorie	394
§ 1. Problemstellung	394
§ 2. Nichtentartete Störungstheorie	395
§ 3. Entartete Störungstheorie	398
*Viertes Kapitel. Gruppen und ihre Darstellungen	400
§ 1. Beispiele von Symmetriegruppen	400
§ 2. Grundbegriffe der Gruppentheorie	401
a) Die Gruppenaxiome	401
b) Gruppenordnung, Kontinuierliche Gruppen	402
c) Gruppentafel	403
d) Klasseneinteilung	404
§ 3. Die Darstellungen einer Gruppe	405
a) Definition einer Darstellung ρ	405
b) Äquivalente Darstellungen	407
c) Der Darstellungsraum u_ρ	407
§ 4. Reduzible und irreduzible Darstellungen	408
a) Definition	408
b) Sätze über irreduzible Darstellungen	409
§ 5. Charaktere von Darstellungen	410
§ 6. Die Produktdarstellung	414
§ 7. Die Darstellungen der Drehgruppe	415
Lösungen der Aufgaben	417
Sachregister	483