
Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum

Von N. I. Achieser und I. M. Glasmann

8., erweiterte Auflage

Herausgegeben
von H. Baumgärtel



Akademie-Verlag Berlin
1981

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I. Der Hilbert-Raum	17
1. Lineare Systeme	17
2. Lineare Mannigfaltigkeiten	18
3. Das Skalarprodukt	19
4. Einige allgemeine Begriffe	21
5. Der HILBERT-Raum	23
6. Die Entfernung eines Punktes von einer konvexen Menge	26
7. Die Projektion eines Vektors auf einen Teilraum	27
8. Die Orthogonalisierung einer Vektorfolge	31
9. Die BESSELSche Ungleichung und die Abgeschlossenheitsrelation	33
10. Totale orthogonale Vektorsysteme in H	37
11. Der Raum L^2	40
12. Totale orthonormierte Systeme in L^2	43
13. Biorthogonale Vektorsysteme in H	47
14. Der Raum L^2_σ	49
15. Der Raum der fastperiodischen Funktionen	53
16. Der Begriff der Basis eines Raumes	54
Kapitel II. Lineare Funktionale und beschränkte lineare Operatoren	59
17. Punktfunktionen	59
18. Lineare Funktionale	61
19. Der Satz von F. RIESZ	63
20. Ein Kriterium für die Totalität in H eines vorgegebenen Systems von Vektoren ..	64
21. Ein Hilfssatz über konvexe Halbnormen	65
22. Beschränkte lineare Operatoren	68
23. Beschränkte sesquilineare Funktionale	69
24. Die allgemeine Form eines sesquilinearen beschränkten Funktionals	71
25. Adjungierte Operatoren	72
26. Schwache Konvergenz in H	75
27. Kompaktheit	77
28. Ein Kriterium für die Beschränktheit eines Operators	79
29. Lineare Operatoren im separablen Raum	79
30. Der Begriff des kompakten Operators	84
31. Die HILBERT-SCHMIDTSche Norm	86
32. HILBERT-SCHMIDTSche Operatoren	89
33. Konvergente Folgen beschränkter linearer Operatoren	90
34. Mengen beschränkter linearer Operatoren im separablen HILBERT-Raum	92
Kapitel III. Projektoren und unitäre Operatoren	95
35. Definition eines Projektors	95
36. Die Eigenschaften der Projektoren	95
37. Operationen mit Projektoren	97
38. Folgen von Projektoren	99

39.	Die Öffnung zweier linearer Mannigfaltigkeiten	100
40.	Unitäre Operatoren	102
41.	Isometrische Isomorphismen	103
42.	Der FOURIER-PLANCHEREL-Operator	104
Kapitel IV. Einige allgemeine Begriffe und Sätze aus der Theorie der linearen Operatoren		109
43.	Abgeschlossene Operatoren	109
44.	Allgemeine Definition eines adjungierten Operators	110
45.	Eigenvektoren, invariante Teilräume und Reduzibilität linearer Operatoren	112
46.	Symmetrische Operatoren	115
47.	Einige Sätze über isometrische und unitäre Operatoren	117
48.	Der Begriff des Spektrums	117
49.	Die Resolvente	120
50.	Die Konjugation	122
51.	Die Methode der Graphen	123
52.	Eine Verallgemeinerung des Begriffs des Projektors	127
53.	Matrixdarstellung unbeschränkter symmetrischer Operatoren	128
54.	Der Operator der Multiplikation mit einer unabhängigen Veränderlichen	132
55.	Der Differentiationsoperator	135
Kapitel V. Spektralanalyse kompakter Operatoren		141
56.	Zwei Hilfssätze	141
57.	Eigenwerte kompakter Operatoren in \mathbb{R}	142
58.	FREDHOLMSche Sätze für kompakte Operatoren	145
59.	Die Methode von F. RIESZ in der Theorie der linearen Funktionalgleichungen ...	147
60.	Kompakte selbstadjungierte Operatoren in \mathbb{R}	151
61.	Kompakte normale Operatoren	155
62.	Anwendungen auf die Theorie der fastperiodischen Funktionen	157
63.	Die Entwicklung eines beliebigen kompakten Operators in eine Reihe nach ein- dimensionalen Operatoren	163
64.	Nukleare Operatoren	166
65.	SCHAUDERScher Fixpunktsatz	170
66.	Der Satz von der Existenz eines invarianten Teilraumes eines beliebigen kompakten Operators in H	175
Kapitel VI. Spektralanalyse unitärer und selbstadjungierter Operatoren		178
67.	Die Zerlegung der Einheit	178
68.	Das trigonometrische Momentproblem	180
69.	Analytische Funktionen mit Werten in einer Halbebene	183
70.	Der Satz von BOCHNER-CHINTSCHIN	189
71.	Die Spektraldarstellung eines unitären Operators	192
72.	Operator-STIELTJES-Integrale	196
73.	Integraldarstellung einer Gruppe unitärer Operatoren	200
74.	Die Integraldarstellung der Resolvente eines selbstadjungierten Operators	202
75.	Die Spektraldarstellung selbstadjungierter Operatoren	207
76.	Über Mengen vom Operatormaß Null in separablen Räumen	212
77.	Funktionen von unitären Operatoren	214
78.	Direkter Beweis für die Spektraldarstellung eines unitären Operators	218
79.	Die CAYLEY-Transformation	221
80.	Vertauschbare Operatoren	225
81.	Spektraldarstellung beschränkter normaler Operatoren	226
82.	Das Spektrum selbstadjungierter und unitärer Operatoren	227
83.	Das einfache Spektrum	231
84.	Spektraltypen	236
85.	Das mehrfache Spektrum	238
86.	Kanonische Form eines selbstadjungierten Operators mit einem Spektrum endlicher Vielfachheit	239

87.	Einige Bemerkungen über unitäre Invarianten selbstadjungierter Operatoren	242
88.	Allgemeine Definition einer Funktion eines selbstadjungierten Operators	244
89.	Beispiele	246
90.	Algebren beschränkter selbstadjungierter Operatoren	251
91.	Eine charakteristische Eigenschaft der Funktionen eines selbstadjungierten Operators	255
92.	Der Satz vom erzeugenden Operator	257
Kapitel VII. Spektrum und Störungen selbstadjungierter Operatoren		259
93.	Das wesentliche Spektrum eines selbstadjungierten Operators	259
94.	Die Sätze von H. WEYL und J. v. NEUMANN über kompakte Störungen	262
95.	Der absolutstetige und der singuläre Teil des Spektrums	268
96.	Die Invarianz des absolutstetigen Spektrums bei endlich-dimensionalen Störungen	270
97.	Definition und formale Eigenschaften der Wellenoperatoren	274
98.	Existenz der Wellenoperatoren im Falle endlich-dimensionaler Störungen	278
99.	Übergang zum allgemeinen Fall nuklearer Störungen	281
Kapitel VIII. Theorie der Erweiterungen symmetrischer Operatoren		286
100.	Defektindizes	286
101.	Weitere Bemerkungen zur CAYLEY-Transformation	289
102.	Die NEUMANNschen Formeln	292
103.	Einfache symmetrische Operatoren	294
104.	Die Struktur maximaler Operatoren	296
105.	Die Spektren selbstadjungierter Erweiterungen eines vorgegebenen symmetrischen Operators	299
106.	Die Formel von M. G. KREIN für die Resolvente der selbstadjungierten Erweiterungen eines vorgegebenen symmetrischen Operators	302
107.	Über selbstadjungierte Erweiterungen halbbeschränkter Operatoren	306
108.	Selbstadjungierte Erweiterungen beschränkter symmetrischer Operatoren mit in H nicht dichtem Definitionsbereich bei Erhaltung der Norm	309
109.	Selbstadjungierte Erweiterungen eines halbbeschränkten symmetrischen Operators bei Erhaltung seiner unteren Grenze	314
Kapitel IX. Verallgemeinerte Erweiterungen und verallgemeinerte Spektralfunktionen symmetrischer Operatoren		319
110.	Verallgemeinerte Zerlegung der Einheit. Satz von M. A. NEUMARK	319
111.	Selbstadjungierte Erweiterungen, die aus dem Raum herausführen, und Spektralfunktionen symmetrischer Operatoren	323
112.	Spektralfunktionen symmetrischer Operatoren und verallgemeinerte Resolventen	329
113.	Die Formel von M. G. KREIN für verallgemeinerte Resolventen	334
114.	Quasi-selbstadjungierte Erweiterungen und charakteristische Funktionen eines symmetrischen Operators	339
115.	Dreiecksentwicklungen einiger nichtselbstadjungierter Operatoren	351
Anhang I. Integraloperatoren		356
116.	Definitionen und Hilfssätze	356
117.	Beispiel	359
118.	Spektralfunktionen eines Integraloperators mit CARLEMANSchem Kern	363
119.	Spektraldarstellung CARLEMANScher Kerne	371
120.	Verallgemeinerung der HILBERT-SCHMIDTschen Formeln	373
121.	Charakteristische Eigenschaften der CARLEMANSchen Integraloperatoren	374
122.	Der Satz von J. v. NEUMANN	378
Anhang II. Differentialoperatoren		382
123.	Selbstadjungierte Differentialausdrücke	382
124.	Reguläre Differentialoperatoren	386

125.	Selbstadjungierte Erweiterungen eines regulären Differentialoperators	387
126.	Singuläre Differentialoperatoren.....	392
127.	Selbstadjungierte Erweiterungen eines singulären Differentialoperators	395
128.	Die Resolventen selbstadjungierter Erweiterungen	399
129.	Umkehrformeln, die mit Differentialoperatoren zweiter Ordnung zusammenhängen	405
130.	Verallgemeinerung auf Differentialoperatoren beliebiger Ordnung	417
131.	Die Untersuchung des Spektrums von Differentialoperatoren mit Hilfe der Aufspaltungsmethode	421
132.	Beispiele	429
Anwendung (N. I. Achieser). Inverse Probleme der Spektralanalyse und hyperelliptische Integrale		448
Literaturverzeichnis		483
Grundlegende Arbeiten und Lehrbücher		483
Ergänzende Literatur		484
Namen- und Sachverzeichnis		491