

Mathematik

Lehrbuch für Fachhochschulen

Band 1

Akad. Dir. Dr. rer. nat. Dietrich Feldmann
Prof. Dr. rer. nat. Albert Fetzer
Prof. Dr. rer. nat. Heiner Fränkel
Prof. Dipl.-Math. Horst Schwarz †
Prof. Dr. rer. nat. Werner Spatzek
Prof. Dr. rer. nat. Siegfried Stief

Herausgegeben von

Prof. Dr. rer. nat. Albert Fetzer
Prof. Dr. rer. nat. Heiner Fränkel

Vierte neubearbeitete Auflage

VDI VERLAG

Inhalt

1 Mengen, reelle Zahlen	1
1.1 Begriffe und Sprechweisen	1
1.2 Mengenoperationen	3
1.3 Die Menge der reellen Zahlen	3
1.3.1 Grundgesetze der Addition und der Multiplikation	4
1.3.2 Grundgesetze der Anordnung	6
1.3.3 Eigenschaften der Vollständigkeit	12
Aufgaben	12
1.4 Vollständige Induktion	13
1.4.1 Schematische Schreibweise	13
1.4.2 Vollständige Induktion bei Summenformeln	15
1.4.3 Vollständige Induktion bei Ungleichungen	18
1.4.4 Binomischer Satz	19
Aufgaben	22
2 Funktionen	24
2.1 Grundbegriffe	24
2.1.1 Einige spezielle Funktionen	28
2.1.2 Umkehrfunktion und Verkettung von Funktionen	30
Aufgaben	36
2.2 Eigenschaften von Funktionen	38
Aufgaben	43
2.3 Rationale Funktionen	44
2.3.1 Ganzrationale Funktionen	44
2.3.2 Gebrochenrationale Funktionen	49
Aufgaben	55
2.4 Potenzfunktionen	56
2.5 Trigonometrische Funktionen und Arcusfunktionen	58
2.5.1 Sinusfunktion und Kosinusfunktion	59
2.5.2 Tangensfunktion und Kotangensfunktion	61
2.5.3 Arcus-Funktionen	64
Aufgaben	68

3 Zahlenfolgen und Grenzwerte	70
3.1 Definition und Eigenschaften von Folgen	70
Aufgaben	74
3.2 Konvergente Folgen	76
3.2.1 Grenzwert einer Folge	76
3.2.2 Rechnen mit Grenzwerten	84
Aufgaben	91
3.3 Monotone und beschränkte Folgen	93
3.3.1 Konvergenzkriterium monotoner Folgen	93
3.3.2 Die Eulersche Zahl e	96
Aufgaben	98
3.4 Die e - und die \ln -Funktion	99
Aufgaben	106
4 Grenzwerte von Funktionen; Stetigkeit	108
4.1 Grenzwert von f für $x \rightarrow \infty$	108
Aufgaben	117
4.2 Grenzwert von f für $x \rightarrow x_0$	118
4.2.1 Definition des Grenzwertes von f für $x \rightarrow x_0$	118
4.2.2 Einseitige Grenzwerte; Uneigentliche Grenzwerte	125
4.2.3 Rechnen mit Grenzwerten von Funktionen	130
Aufgaben	136
4.3 Stetige und unstetige Funktionen	138
4.3.1 Definition der Stetigkeit	138
4.3.2 Klassifikation von Unstetigkeitsstellen	142
4.3.3 Eigenschaften stetiger Funktionen	146
Aufgaben	154
4.4 Allgemeine Exponential- und Logarithmusfunktion	156
Aufgaben	160
4.5 Die hyperbolischen Funktionen und ihre Umkehrfunktionen	161
Aufgaben	166
4.6 Spezielle Grenzwerte	166
5 Die komplexen Zahlen	169
5.1 Definition der Menge \mathbb{C}	169
Aufgaben	182
5.2 Trigonometrische Darstellung komplexer Zahlen	183
Aufgaben	187

5.3 Potenzieren, Radizieren und Logarithmieren	188
Aufgaben	197
6 Lineare Gleichungssysteme, Matrizen, Determinanten	199
6.1 Lineare Gleichungssysteme; das Gaußsche Eliminationsverfahren	199
6.1.1 Vorbetrachtungen	199
6.1.2 Das Gaußsche Eliminationsverfahren	200
Aufgaben	204
6.2 Matrizen	204
6.2.1 Grundbegriffe	204
6.2.2 Addition und Multiplikation von Matrizen	208
6.2.3 Die Inverse einer Matrix	216
Aufgaben	218
6.3 Determinanten	220
6.3.1 Definition der Determinante	220
6.3.2 Eigenschaften der Determinanten	224
6.3.3 Berechnung der Inversen einer regulären Matrix	228
Aufgaben	231
6.4 Lineare Gleichungssysteme	233
6.4.1 Allgemeines über die Lösungen von Gleichungssystemen	233
6.4.2 Quadratische, lineare Systeme mit regulären Matrizen	237
Aufgaben	243
7 Vektoren und ihre Anwendungen	245
7.1 Vektoroperationen	247
7.1.1 Vektoraddition	247
7.1.2 Produkt eines Vektors mit einer reellen Zahl	250
7.1.3 Das Skalarprodukt	253
7.1.4 Das vektorielle Produkt	259
7.1.5 Das Spatprodukt	263
Aufgaben	265
7.2 Vektorrechnung unter Verwendung eines Koordinatensystems	267
7.2.1 Lineare Abhängigkeit	267
7.2.2 Komponentenschreibweise	270
7.2.3 Anwendung in der Geometrie	279
7.2.4 Mehrfachprodukte	290
Aufgaben	292
7.3 Geometrische und Koordinaten-Transformationen	294
7.3.1 Geometrische 3D-Transformationen	295
7.3.2 Koordinatentransformationen	305
Aufgaben	309

7.4	Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen	310
	Aufgaben	326
7.5	Numerisches Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen	327
7.5.1	Probleme bei der numerischen Behandlung	327
7.5.2	Der QR-Algorithmus	333
	Aufgaben	338
8	Differentialrechnung	339
8.1	Begriff der Ableitung	339
8.1.1	Steigung einer Kurve	339
8.1.2	Definition der Ableitung	340
8.1.3	Einseitige und uneigentliche Ableitungen	344
8.1.4	Anwendungen der Ableitung in den Naturwissenschaften	348
	Aufgaben	353
8.2	Ableitungsregeln	354
8.2.1	Ableitung einiger Funktionen	354
8.2.2	Differentiation einer Linearkombination von Funktionen	356
8.2.3	Die Produktregel	358
8.2.4	Die Quotientenregel	359
8.2.5	Ableitung einer mittelbaren Funktion	361
8.2.6	Ableitung der Umkehrfunktion	363
8.2.7	Höhere Ableitungen	365
	Aufgaben	368
8.3	Ableitung elementarer Funktionen	369
8.3.1	Ableitung der rationalen Funktionen	370
8.3.2	Ableitung der trigonometrischen Funktionen und der Arcus-Funktionen	370
8.3.3	Ableitung der Exponential- und Logarithmusfunktion	373
8.3.4	Ableitung der hyperbolischen Funktionen und der Area-Funktionen	376
	Aufgaben	379
8.4	Das Differential einer Funktion	381
8.4.1	Der Begriff des Differentials	381
8.4.2	Anwendung in der Fehlerrechnung	383
	Aufgaben	385
8.5	Mittelwertsatz der Differentialrechnung	387
8.5.1	Satz von Rolle	387
8.5.2	Mittelwertsatz der Differentialrechnung	390
8.5.3	Die Taylorsche Formel	394
8.5.4	Numerische Differentiation	401
	Aufgaben	405
8.6	Berechnung von Grenzwerten	407
8.6.1	Regeln von Bernoulli-de l'Hospital	407
8.6.2	Anwendung auf weitere unbestimmte Formen	411
	Aufgaben	413

8.7	Kurvenuntersuchungen mit Hilfe der Differentialrechnung	415
8.7.1	Monotone Funktionen	415
8.7.2	Extremwerte	416
8.7.3	Konvexität und Wendepunkt	422
	Aufgaben	430
8.8	Numerische Verfahren zur Lösung von Gleichungen	433
8.8.1	Allgemeines Iterationsverfahren	433
8.8.2	Das Iterationsverfahren von Newton	441
8.8.3	Regula falsi	444
	Aufgaben	446
9	Integralrechnung	449
9.1	Das bestimmte Integral	449
9.1.1	Einführung	449
9.1.2	Zerlegungen	450
9.1.3	Definition des bestimmten Integrals	452
9.1.4	Weitere Definitionen und Sätze über integrierbare Funktionen	456
9.1.5	Flächeninhalt	468
	Aufgaben	470
9.2	Das unbestimmte Integral	470
9.2.1	Integralfunktion	470
9.2.2	Stammfunktion und unbestimmtes Integral	477
	Aufgaben	480
9.3	Integrationsmethoden	481
9.3.1	Grundintegrale	481
9.3.2	Grundformeln	482
9.3.3	Partielle Integration	487
9.3.4	Integration durch Substitution	491
9.3.5	Tabelle unbestimmter Integrale	494
	Aufgaben	497
9.4	Uneigentliche Integrale	498
9.4.1	Integrale über unbeschränkte Intervalle	499
9.4.2	Integrale von nicht beschränkten Funktionen	506
9.4.3	Die Γ -Funktion	508
	Aufgaben	511
9.5	Numerische Integration	512
9.5.1	Vorbetrachtungen	512
9.5.2	Spezielle Integrationsformeln	513
9.5.3	Summierte Integrationsformeln	517
	Aufgaben	525

Anhang Aufgabenlösung	526
Zu Abschnitt 1	526
Zu Abschnitt 2	528
Zu Abschnitt 3	534
Zu Abschnitt 4	540
Zu Abschnitt 5	548
Zu Abschnitt 6	552
Zu Abschnitt 7	557
Zu Abschnitt 8	572
Zu Abschnitt 9	602
Literaturverzeichnis	611
Sachwortverzeichnis	613