

Hubert Goenner

# Einführung in die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie

Mit 89 Abbildungen

Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg · Berlin · Oxford



Titelbild: © THE IMAGE BANK / Garry Gay

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

**Goenner, Hubert:**

Einführung in die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie /

Hubert Goenner. - Heidelberg ; Berlin ; Oxford : Spektrum,

Akad. Verl., 1996

ISBN 3-86025-333-6

© 1996 Spektrum Akademischer Verlag GmbH, Heidelberg · Berlin · Oxford

Alle Rechte, insbesondere die der Übersetzung in fremde Sprachen, sind vorbehalten. Kein Teil des Buches darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages photokopiert oder in irgendeiner anderen Form reproduziert oder in eine von Maschinen verwendbare Sprache übertragen oder übersetzt werden.

Lektorat: Peter Ackermann, Caputh

Produktion: Susanne Tochtermann

Einbandgestaltung: Kurt Bitsch, Birkenau

Satz: Wobser - Tanomvet, Frankenthal

Druck und Verarbeitung: Franz Spiegel GmbH, Ulm

Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg · Berlin · Oxford

EIN VERLAG DER  SPEKTRUM FACHVERLAGE GMBH

# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Einleitung</b> .....	1
0.1	Spezielle Relativitätstheorie .....	1
0.2	Allgemeine Relativitätstheorie .....	2

## Teil I

<b>1</b>	<b>Relativitätsprinzip und Lorentztransformation</b> .....	9
1.1	Raum – Zeit als Ereigniskontinuum .....	9
1.2	Relativitätsprinzip in der Mechanik .....	11
1.3	Einsteinsches Relativitätsprinzip und Lorentztransformation .....	12
1.3.1	Begründung der speziellen Lorentztransformation .....	14
1.3.2	Das Additionstheorem der Geschwindigkeiten .....	19
1.4	Experimentelle Überprüfung der Grundpostulate .....	21
1.4.1	Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Bewegung der Lichtquelle .....	21
1.4.2	Isotropie des Raumes .....	27
<b>2</b>	<b>Einfache Folgerungen aus der Lorentztransformation</b> .....	31
2.1	Makroskopisches Kausalitätsprinzip .....	31
2.2	Relativität der Gleichzeitigkeit, Raum-Zeit-Diagramm .....	32
2.3	Längen- und Zeitmessungen, Uhrensynchronisation .....	35
2.4	Längenkontraktion .....	37
2.5	Zeitdilatation .....	38
2.6	Dopplereffekt und Aberration .....	39
2.6.1	Transformationsverhalten einer ebenen Welle .....	39
2.6.2	Dopplereffekt .....	42
2.6.3	Aberration .....	44
2.7	Das Zwillingsparadoxon .....	47

2.8	Abbildung schnell bewegter Gegenstände.....	53
2.9	Experimentelle Überprüfung .....	58
2.10	Die Vakuumlichtgeschwindigkeit als obere Grenze der Signalgeschwindigkeit.....	66
<b>3</b>	<b>Die Geometrie der Raum-Zeit .....</b>	<b>68</b>
3.1	Spezielle Lorentz-Transformation und elektrischer Feldstärketensor .....	68
3.1.1	Vierdimensionale Formulierung der spez. Lorentz-Transformation .....	69
3.1.2	Transformationsverhalten der elektromagnetischen Größen.....	72
3.2	Der Minkowski-Raum .....	76
3.2.1	Vektoren und Linearformen .....	76
3.2.2	Minkowski-Metrik .....	81
3.2.3	Tensoren, Tensorfelder, Tensordichten .....	87
3.2.4	Minkowski-Raum .....	91
3.3	Homogene Lorentz-Transformation .....	92
3.4	Die Poincaré-Gruppe* .....	95
3.4.1	Darstellungen der Lorentz-Gruppe .....	98
3.4.2	Irreduzible Darstellungen der Poincaré-Gruppe .....	101
<b>4</b>	<b>Relativistische Mechanik und Feldtheorie .....</b>	<b>103</b>
4.1	Kinematik des Massenpunktes und Uhrenhypothese .....	103
4.2	Masse, Energie, Impuls .....	106
4.3	Speziell-relativistische Mechanik von Punktteilchen .....	110
4.3.1	Dynamik einer Punktmasse .....	110
4.3.2	Schwerpunktsystem .....	112
4.3.3	Elastischer Zweikörperstoß* .....	116
4.3.4	Compton-Streuung* .....	122
4.4	Wirkungsquerschnitt der Streuung .....	124
4.4.1	Zur Definition des Wirkungsquerschnitts .....	124
4.4.2	Transformation des Wirkungsquerschnitts vom Laborsystem zum Schwerpunktsystem .....	125
4.5	Empirische Überprüfung der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse und der Energie-Masse-Äquivalenz.....	128
4.5.1	Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse.....	128
4.5.2	Energie-Masse-Äquivalenz .....	132
4.5.3	Synchrotronstrahlung .....	133
4.6	Feldtheorie .....	134

.....	53	4.6.1	Maxwell-Gleichungen und Energie-Impulstensor des elektromagnetischen Feldes.....	134
.....	58	4.6.2	Hydrodynamik, Thermodynamik*.....	139
.....	66	4.7	Spinoren und relativistische Feldgleichungen.....	144
.....	68	4.7.1	Spinoren.....	144
.....	68	4.7.2	Spinoren und Darstellung der Lorentzgruppe.....	151
.....	68	4.7.3	Spin und Darstellungen $D^{j,*}$ .....	154
.....	68	4.7.4	Relativistische 1-Teilchen-Feldgleichungen.....	157
.....	69	4.8	Weitere (indirekte) empirische Bestätigung der speziellen Relativitätstheorie*.....	162
.....	72	<b>5</b>	<b>Minkowski-Raum und Nichtinertialsysteme.....</b>	<b>164</b>
öBen.....	72	5.1	Trägheitsfelder.....	164
.....	76	5.2	Freies Teilchen im Nichtinertialsystem.....	165
.....	76	5.3	Momentaner Ruhraum eines Beobachters und Geometrie des Anschauungsraumes.....	173
.....	81	<b>6</b>	<b>Äquivalenzprinzip und lokales Inertialsystem.....</b>	<b>175</b>
.....	87	6.1	Träge und schwere Masse.....	175
.....	91	6.2	Homogenes Gravitationsfeld und Nichtinertialsystem.....	176
.....	92	6.3	Äquivalenzprinzip und lokales Inertialsystem.....	177
.....	95	6.3.1	Einsteinsches Äquivalenzprinzip.....	177
.....	98	6.3.2	Lokale Inertialsysteme.....	178
.....	101	6.4	Ereignisabstand und Gravitationspotentiale.....	180
.....	103	6.5	Permanente und Nichtpermanente Gravitationsfelder.....	183
.....	103	6.6	Experimente zum Einfluß des Gravitationsfeldes auf den Uhrengang.....	184
.....	106	6.6.1	Die Experimente von Pound und Mitarbeitern.....	184
.....	110	6.6.2	Messungen durch Raumprobe zum Saturn.....	186
.....	110	6.6.3	Vergleich des Uhrenganges für Uhren in Turin (250 m ü.M.) und auf dem Monte Rosa-Plateau (3500 m ü.M.).....	188
.....	112	6.7	Zu Experimenten auf einer Erdumlaufbahn oder auf der rotierenden Scheibe.....	188
.....	116	<b>7</b>	<b>Das Gravitationsfeld einer kugelsymmetrischen Massenverteilung (Näherung).....</b>	<b>190</b>
.....	122	7.1	Die Gravitationspotentiale.....	190
.....	124	7.2	Bewegungsgleichungen von Probeteilchen im Gravitationsfeld.....	193
.....	124			
.....	125			
.....	128			
.....	128			
.....	132			
.....	133			
.....	134			

7.3	Bewegung einer Probemasse im zentralsymmetrischen statischen Gravitationsfeld . . . . .	194
7.4	Die Perihelbewegung des Planeten Merkur . . . . .	200
7.5	Die Lichtablenkung am Sonnenrand . . . . .	204
7.6	Ausklang: Die Dynamik des Gravitationsfeldes (erste Näherung) . . . . .	209

## Teil II

	Zusammenfassung des ersten Teils . . . . .	217
<b>8</b>	<b>Differentialgeometrie Riemannscher Mannigfaltigkeiten . . . .</b>	<b>221</b>
8.1	Die Menge der physikalischen Ereignisse als differenzierbare Mannigfaltigkeit* . . . . .	221
8.1.1	Differenzierbarkeitsstruktur . . . . .	221
8.1.2	Weitere Eigenschaften der Ereignismenge . . . . .	224
8.2	Lineare Übertragung und kovariante Ableitung . . . . .	226
8.2.1	Vergleich von Vektorfeldern (Parallelverschiebung) auf Mannigfaltigkeiten . . . . .	226
8.2.2	Kovariante Ableitung . . . . .	227
8.2.3	Kovariante Ableitung von Tensorfeldern . . . . .	233
8.3	Krümmung . . . . .	234
8.3.1	Motivation . . . . .	234
8.3.2	Der Krümmungstensor einer linearen Übertragung . . . . .	236
8.3.3	Berechnung des Krümmungstensors mit der Cartanschen Differentialformenmethode . . . . .	239
8.4	Riemannsche Mannigfaltigkeiten . . . . .	243
8.4.1	Lorentz-Metrik . . . . .	244
8.4.2	Riemannsche Mannigfaltigkeit . . . . .	246
8.4.3	Lokale Inertialkoordinaten . . . . .	248
8.4.4	Riemannscher Krümmungstensor . . . . .	252
8.4.5	Beispiele zur Veranschaulichung und physikalischen Interpretation . . . . .	256
8.4.6	Geodätische Abweichung . . . . .	260
<b>9</b>	<b>Allgemeine Relativitätstheorie – Einsteinsche Gravitationstheorie . . . . .</b>	<b>265</b>
9.1	Einsteinsche Feldgleichungen . . . . .	265
9.1.1	Mathematisches Modell und Dynamik . . . . .	265
9.1.2	Das Prinzip der minimalen Kopplung . . . . .	267

11.4.1	Abstrahlung von Gravitationswellen durch ein Doppelsternsystem .....	341
11.4.2	Vergleich mit den Beobachtungsdaten des Binärpulsars PSR 1913 + 16 .....	343
11.4.3	Direkter Nachweis von Gravitationswellen? .....	350
<b>12</b>	<b>Sternaufbau, Gravitationskollaps, schwarze Löcher .....</b>	<b>352</b>
12.1	Das statische Gravitationsfeld im Innern eines kugelsymmetrischen Körpers .....	352
12.1.1	Die Feldgleichungen und die LOV-Gleichung .....	352
12.1.2	Die innere Schwarzschild-Lösung .....	356
12.2	Das zeitabhängige Gravitationsfeld im Innern von Materiestaub .....	358
12.2.1	Form der Metrik und Einsteinsche Feldgleichungen .....	358
12.2.2	Lösung der Feldgleichungen und Interpretation .....	360
12.3	Zentralsymmetrischer Gravitationskollaps .....	363
12.3.1	Gleichgewichtsbedingungen .....	364
12.3.2	Zustandsgleichung der Materie und Grenzmassen .....	366
12.3.3	Endzustände kalter Sternmaterie .....	371
12.4	Schwarze Löcher .....	374
12.4.1	Ereignishorizont und statische Grenze .....	374
12.4.2	Die Kerr-Metrik als Modell eines schwarzen Loches .....	379
12.4.3	Ein Eindeutigkeitssatz für schwarze Löcher* .....	385
12.4.4	Thermodynamik des schwarzen Loches* .....	387
12.4.5	Wie findet man schwarze Löcher? .....	393
<b>13</b>	<b>Symmetrien und Erhaltungssätze .....</b>	<b>396</b>
13.1	Symmetrien des metrischen Feldes (Lokale Isometrien) .....	396
13.1.1	Killing-Gleichungen .....	396
13.1.2	Integrabilitätsbedingungen* .....	400
13.2	Stationäre und statische Riemannsche Räume .....	401
13.3	Die Lie-Ableitung* .....	404
13.3.1	Definition der Lie-Ableitung .....	404
13.4	Erhaltungssätze und Symmetrien .....	406
13.4.1	Integrale Erhaltungssätze und Materieverteilung .....	406
13.4.2	Die Komar-Integrale .....	408
<b>14</b>	<b>Kosmologie .....</b>	<b>411</b>
14.1	Modellvorstellungen und Robertson-Walker-Metrik .....	411
14.1.1	Beobachtungen mit Bedeutung für das kosmologische Modell ..	412

..... 341  
 ..... 343  
 ..... 350  
 ..... 352  
 ..... 352  
 ..... 352  
 ..... 356  
 ..... 358  
 ..... 358  
 ..... 360  
 ..... 363  
 ..... 364  
 ..... 366  
 ..... 371  
 ..... 374  
 ..... 374  
 ..... 379  
 ..... 385  
 ..... 387  
 ..... 393  
 ..... 396  
 ) ..... 396  
 ..... 396  
 ..... 400  
 ..... 401  
 ..... 404  
 ..... 404  
 ..... 406  
 ..... 406  
 ..... 408  
 ..... 411  
 ..... 411  
 Modell .. 412

14.1.2 Das Materiemodell ..... 420  
 14.1.3 Die Robertson-Walker-Metrik ..... 424  
 14.2 Einfache homogen-isotrope kosmologische  
 Lösungen der Einsteinschen Gravitationstheorie ..... 426  
 14.2.1 Materie- und Strahlungskosmos ..... 426  
 14.2.2 Lösungen mit kosmologischer Konstante ..... 435  
 14.3 Charakteristische Eigenschaften  
 des homogen-isotropen kosmologischen Modells ..... 438  
 14.3.1 Horizonte ..... 438  
 14.3.2 Rotverschiebung der Spektrallinien ..... 443  
 14.3.3 Das Weltalter ..... 444  
 14.4 Thermodynamik im Kosmos ..... 447  
 14.5 Kosmologisches Standardmodell und Erfahrung ..... 449  
 14.5.1 Helligkeits-Rotverschiebungsbeziehung ..... 449  
 14.5.2 Anknüpfung an die Beobachtungen ..... 452  
  
 Nachwort ..... 455

**Anhang**

A Verwendete Notationskonvention ..... 459  
 B Anleitung zur Lösung der Übungsaufgaben ..... 461  
  
 Abbildungsverzeichnis ..... 488  
  
 Literaturverzeichnis ..... 491  
  
 Namen- und Sachverzeichnis ..... 510