

# Signaltheorie

Von Dr.-Ing. habil. Alfred Mertins  
Technische Universität Hamburg-Harburg

Mit 101 Bildern



**B. G. Teubner Stuttgart 1996**

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Signale und Signorräume</b>	<b>1</b>
1.1	Signorräume . . . . .	2
1.2	Grundbegriffe der Systemtheorie . . . . .	8
1.3	Zufällige Signale . . . . .	11
1.3.1	Eigenschaften von Zufallsvariablen . . . . .	12
1.3.2	Zufallsprozesse . . . . .	13
1.3.3	Transformation stochastischer Prozesse durch lineare Systeme	17
1.4	Integraltransformationen . . . . .	18
1.5	Hilbert-Transformation . . . . .	24
1.6	Repräsentation von Bandpaßsignalen . . . . .	26
<b>2</b>	<b>Diskrete Transformationen</b>	<b>35</b>
2.1	Einführung . . . . .	36
2.2	Orthogonale Reihenentwicklungen . . . . .	37
2.2.1	Berechnung des Repräsentanten . . . . .	37
2.2.2	Orthogonale Projektion . . . . .	38
2.2.3	Gram-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren . . . . .	39
2.2.4	Das Parsevalsche Theorem . . . . .	40
2.2.5	Vollständige, orthonormale Funktionensysteme . . . . .	40
2.3	Signalabhängige Transformationen . . . . .	42
2.3.1	Zeitkontinuierliche Karhunen-Loève-Transformation . . . . .	42
2.3.2	Diskrete Karhunen-Loève-Transformation . . . . .	44
2.3.3	KL-Transformation reellwertiger AR(1)-Prozesse . . . . .	49
2.3.4	Whitening-Transformation . . . . .	50
2.4	Signalunabhängige Transformationen . . . . .	52
2.4.1	Beispiele vollständiger, orthonormaler Funktionensysteme . . . . .	52
2.4.2	Hadamard- und Walsh-Hadamard-Transformation . . . . .	55
2.4.3	Diskrete Fourier-Transformation . . . . .	56
2.4.4	Diskrete Cosinus-Transformation . . . . .	58

2.5	Allgemeine Reihenentwicklungen . . . . .	59
2.5.1	Berechnung des Repräsentanten . . . . .	60
2.5.2	Orthogonale Projektion . . . . .	63
2.5.3	Orthogonale Projektion von N-Tupeln . . . . .	65
2.6	Mathematische Hilfsmittel . . . . .	67
2.6.1	QR-Zerlegung . . . . .	67
2.6.2	Die Moore-Penrose-Pseudoinverse . . . . .	68
2.6.3	Householder-Transformationen . . . . .	70
2.6.4	Givens-Rotationen . . . . .	73
2.7	Zweidimensionale Transformationen . . . . .	75
<b>3</b>	<b>Filterbänke</b> . . . . .	<b>79</b>
3.1	Zwei-Kanal-Filterbänke mit kritischer Abtastung . . . . .	80
3.1.1	Beziehungen zwischen Ein- und Ausgang . . . . .	80
3.1.2	Matrizendarstellung . . . . .	82
3.1.3	Filterbänke mit perfekter Rekonstruktion . . . . .	83
3.1.4	Zusammenhang zwischen den Analyse- und Synthesefiltern bei perfekter Rekonstruktion . . . . .	84
3.1.5	Analyse und Synthese mit FIR-Filtern . . . . .	85
3.1.6	Polyphasenzerlegung . . . . .	86
3.1.7	Paraunitäre Zwei-Kanal-Filterbänke . . . . .	89
3.1.8	Paraunitäre Filterbank in Lattice-Struktur . . . . .	92
3.1.9	Paraunitäre Filterbänke mit mittelwertfreiem Hochpaßfilter . . . . .	93
3.1.10	Linearphasige Filterbank in Lattice-Struktur . . . . .	94
3.1.11	Filterentwurf durch Vorgabe von Koeffizienten . . . . .	95
3.2	Allgemeine M-Kanal-Filterbänke . . . . .	97
3.2.1	Filterung und Abtastratenumsetzung . . . . .	97
3.2.2	Beziehungen zwischen Ein- und Ausgang einer M-Kanal- Filterbank . . . . .	99
3.2.3	Beschreibung im Zeitbereich . . . . .	99
3.2.4	Polyphasendarstellung . . . . .	103
3.2.5	Paraunitäre Filterbänke . . . . .	105
3.2.6	Beschreibung mit Block-Faltungsmatrizen . . . . .	105
3.3	Modulierte Filterbänke . . . . .	107
3.4	Transmultiplexer-Filterbänke . . . . .	112
3.5	Teilbandverarbeitung endlich langer Signale und zeitvariante Fil- terbänke . . . . .	114
3.5.1	Kompakte Verarbeitung endlich langer Signale . . . . .	114
3.5.2	Zeitvariante Filterbänke . . . . .	125
3.6	Zweidimensionale Filterbänke . . . . .	129

<b>4</b>	<b>Kurzzeit-Fourier-Transformation</b>	<b>133</b>
4.1	Transformation analoger Signale . . . . .	134
4.1.1	Definition . . . . .	134
4.1.2	Zeit-Frequenz-Fenster . . . . .	135
4.1.3	Integrale Rücktransformation . . . . .	137
4.1.4	Diskrete Rücktransformation . . . . .	138
4.2	Transformation zeitdiskreter Signale . . . . .	139
<b>5</b>	<b>Wavelet-Transformation</b>	<b>143</b>
5.1	Definition und Eigenschaften der Wavelet-Transformation . . . . .	143
5.2	Wavelets für die Zeit-Skalen-Analyse . . . . .	147
5.3	Integrale und semidiskrete Rücktransformation . . . . .	150
5.3.1	Integrale Rücktransformation . . . . .	150
5.3.2	Semidiskrete, dyadische Wavelets . . . . .	152
5.4	Wavelet-Reihen . . . . .	156
5.4.1	Dyadische Abtastung . . . . .	156
5.4.2	Aufteilung von Oktaven in Teilbänder . . . . .	158
5.5	Dyadische Wavelet-Reihen und Multiraten-Filterung . . . . .	160
5.5.1	Das Konzept der Mehrfach-Auflösung . . . . .	160
5.5.2	Signalanalyse durch Multiraten-Filterung . . . . .	164
5.5.3	Signalrekonstruktion durch Multiraten-Filterung . . . . .	166
5.5.4	Beziehungen zwischen den Filtern . . . . .	167
5.5.5	Dualität . . . . .	170
5.6	Konstruktion von Wavelets durch Vorgabe von Filterkoeffizienten . . . . .	171
5.6.1	Allgemeine Vorgehensweise . . . . .	171
5.6.2	Anforderungen an die Koeffizienten . . . . .	175
5.6.3	Eine Eigenschaft von Skalierungsfunktionen . . . . .	176
5.6.4	Die Norm konstruierter Skalierungsfunktionen und Wavelets . . . . .	177
5.6.5	Regularität . . . . .	177
5.6.6	Wavelets mit endlicher Zeitdauer . . . . .	178
5.6.7	Daubechies-Wavelets . . . . .	180
5.7	Wavelet-Transformation zeitdiskreter Signale . . . . .	183
5.7.1	Der À-Trous-Algorithmus . . . . .	184
5.7.2	Übereinstimmung des Mallat- und des À-Trous-Algorithmus . . . . .	187
5.7.3	Zeitdiskretes Morlet-Wavelet . . . . .	189
<b>6</b>	<b>Zeit-Frequenz-Verteilungen</b>	<b>191</b>
6.1	Ambiguitätsfunktion . . . . .	191
6.2	Wigner-Verteilung . . . . .	195
6.2.1	Definition und Eigenschaften . . . . .	195
6.2.2	Beispiele . . . . .	199

6.2.3	Kreuzterme und Kreuz-Wigner-Verteilungen . . . . .	200
6.2.4	Einfluß linearer Operationen . . . . .	204
6.3	Allgemeine Zeit-Frequenz-Verteilungen . . . . .	205
6.3.1	Verschiebungsinvariante Zeit-Frequenz-Verteilungen . . . . .	205
6.3.2	Beispiele für verschiebungsinvariante Zeit-Frequenz-Verteilungen . . . . .	208
6.3.3	Affin-invariante Zeit-Frequenz-Verteilungen . . . . .	214
6.3.4	Zeitdiskrete Berechnung von Zeit-Frequenz-Verteilungen . . . . .	215
6.4	Wigner-Ville-Spektrum . . . . .	217
<b>7</b>	<b>Signalerkennung</b>	<b>225</b>
7.1	Binäre Detektion . . . . .	225
7.1.1	Bayes-Detektor . . . . .	226
7.1.2	Maximum-a-posteriori- und Maximum-Likelihood-Detektion . . . . .	230
7.1.3	Detektion in additiven Störungen . . . . .	230
7.1.4	Neyman-Pearson-Test . . . . .	233
7.1.5	Detektion in additiven, gaußschen Störungen . . . . .	234
7.2	Entscheidung zwischen M Hypothesen . . . . .	237
7.3	Ergänzungen . . . . .	238
7.4	Maximum-Likelihood-Detektion von Datensequenzen . . . . .	239
7.4.1	Modell . . . . .	239
7.4.2	Ideales System . . . . .	239
7.4.3	Übertragung über nichtideale Kanäle . . . . .	242
<b>8</b>	<b>Parameter- und Signalschätzung</b>	<b>247</b>
8.1	Maximum-a-posteriori-Schätzung . . . . .	248
8.2	Maximum-Likelihood-Schätzung . . . . .	250
8.3	Eigenschaften von Schätzverfahren . . . . .	252
8.3.1	Erwartungstreue . . . . .	252
8.3.2	Minimale Varianz von Schätzwerten . . . . .	252
8.3.3	Wirksamkeit . . . . .	254
8.4	Lineare Schätzverfahren . . . . .	256
8.4.1	Lineare, erwartungstreue Schätzungen . . . . .	256
8.4.2	Lineare Schätzungen mit minimalem quadratischem Fehler . . . . .	259
8.5	Nichtlineare Regression . . . . .	266
8.6	Lineare Optimalfilter . . . . .	269
8.6.1	Wiener-Filter . . . . .	269
8.6.2	Lineare Prädiktion um einen Schritt . . . . .	272
8.6.3	Filterentwurf auf der Basis endlicher Datenensembles . . . . .	275

<b>Anhang</b>	<b>279</b>
A.1 Vektorräume . . . . .	279
A.2 Lineare Funktionale . . . . .	280
A.3 Lineare Transformationen und Operatoren . . . . .	282
A.4 Die Unschärferelation . . . . .	284
A.5 Signalstatistik in Multiraten-Filterbänken . . . . .	286
A.6 Verbunddichte gaußscher Zufallsvariablen . . . . .	291
A.7 Verzeichnis der wichtigsten Formelzeichen . . . . .	294
 <b>Literaturverzeichnis</b>	 <b>297</b>
 <b>Sachverzeichnis</b>	 <b>309</b>