Jürgen Elstrodt

Maß- und Integrationstheorie

Springer

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I. σ-Algebren und Borelsche Mengen 1

§ 1. Das Inhaltsproblem und das Maßproblem 1

§ 2. Bezeichnungen und mengentheoretische Grundlagen 6
1. Bezeichnungen 6
2. Limes superior und Limes inferior 8
Aufgaben 10

§ 3. Ringe, Algebren, σ-Ringe und σ-Algebren 11
1. Ringstruktur von $\mathfrak{P}(X)$ 11
2. Ringe und Algebren 12
3. σ-Ringe und σ-Algebren 13
Aufgaben 15

§ 4. Erzeuger und Borelsche Mengen 16
1. Erzeuger 16
2. Borelsche Mengen 17
3. Verhalten unter Abbildungen 19
Aufgaben 20

§ 5. Halbringe 20
1. Halbringe 20
2. Der von einem Halbring erzeugte Ring 22
Aufgaben 22

§ 6. Monotone Klassen und Dynkin-Systeme 23
1. Monotone Klassen 23
2. Dynkin-Systeme 24
Aufgaben 26

Kapitel II. Inhalte und Maße 27

§ 1. Inhalte, Prämaße und Maße 27
1. Definitionen und erste Folgerungen 27
2. Ein erster Fortsetzungssatz 30
3. Eigenschaften von Inhalten 31
4. Charakterisierung der σ-Additivität 32
5. Historische Anmerkungen 33
Aufgaben 34

§ 2. Inhalte und Prämaße auf $\mathbb{R}$ 37
1. Endliche Inhalte auf $\mathfrak{J}$ 37
2. Endliche Prämaße auf $\mathfrak{J}$ 38
3. Kurzbiographie von É. Borel 41
Aufgaben 42

§ 3. Inhalte und Prämaße auf $\mathbb{R}^p$ 43
1. Das Lebesguesche Prämaß auf $\mathfrak{J}^p$ 43
2. Differenzenoperatoren 44
3. Inhalte auf $\mathfrak{J}^p$ 45
4. Prämaße auf $\mathfrak{J}^p$ 47
5. Kurzbiographie von J. RADON 48
Aufgaben 49

§ 4. Fortsetzung von Prämaßen zu Maßen 50
1. Äußere Maße 50
2. Der Fortsetzungssatz 53
3. Die Lebesgue-meßbaren Teilmengen des $\mathbb{R}^p$ 55
4. Kurzbiographie von C. CARATHÉODORY 56
Aufgaben 57

§ 5. Eindeutigkeit der Fortsetzung 59
1. σ-endliche Inhalte 59
2. Der Eindeutigkeitssatz 60
3. Wahrscheinlichkeitsmaße und Verteilungsfunktionen auf $\mathbb{R}$ 61
Aufgaben 62

§ 6. Vollständige Maßräume 63
Aufgaben 65

§ 7. Das Lebesguesche Maß 66
1. Approximationssätze 66
2. Charakterisierung der Lebesgue-Meßbarkeit 67
3. Der Satz von H. STEINHAUS 67
4. Meßbarkeit konvexer Mengen 68
Aufgaben 69

§ 8. Das Cantorsche Diskontinuum 70
1. Konstruktion von C 70
2. Triadische Entwicklung 71
3. Mächtigkeiten von $\mathfrak{B}^p$ und $\mathfrak{L}^p$ 73
4. Die Cantorsche Funktion 73
Aufgaben 74

§ 9. Metrische äußere Maße und Hausdorff-Maße 76
1. Metrische äußere Maße 76
2. Hausdorff-Maße 77
3. Rektifizierbare Kurven 78
4. Kurzbiographie von F. HAUSDORFF 80
Aufgaben 81

Kapitel III. Meßbare Funktionen 83

§ 1. Meßbare Abbildungen und Bildmaße 85
1. Meßbare Abbildungen 85
2. Bildmaße 87
Aufgaben 88

§ 2. Bewegungsinvarianz des Lebesgue-Maßes 89
1. Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes 89
2. Das Bildmaß des Lebesgue-Maßes unter bijektiven affinen Abbildungen 90
3. Bewegungsinvarianz des Lebesgue-Maßes 92
4. Das p-dimensionale äußere Hausdorff-Maß 94
Aufgaben 95

§ 3. Existenz nicht meßbarer Mengen 96
1. Nicht Lebesgue-meßbare Mengen und Unlösbarkeit des Maßproblems 96
2. Kurzbiographie von G. VITALI 99
3. Weitere Beispiele nicht Lebesgue-meßbarer Mengen 99
4. Existenz nicht meßbarer Mengen für Lebesgue–Stieltjessche Maße 100
Aufgaben 102

§ 4. Meßbare numerische Funktionen 103
1. Rechnen in $\overline{\mathbb{R}}$, Topologie von $\overline{\mathbb{R}}$ 103
2. Meßbare numerische Funktionen 105
3. Approximation durch Treppenfunktionen 107
4. Abzählbar erzeugte Meßräume 108
5. Ein minimaler Erzeuger von $\mathfrak{B}^1$ 109
Aufgaben 110

§ 5. Produkt-σ-Algebren 112
1. Initial-σ-Algebren und Produkt-σ-Algebren 112
2. Borel-Mengen topologischer Produkte 114
3. Meßbarkeit der Diagonalen 115
Aufgaben 116

Kapitel IV. Das Lebesgue-Integral 118

§ 1. Integration von Treppenfunktionen 119
Aufgaben 120

§ 2. Integration nicht-negativer meßbarer Funktionen 121
1. Definition des Integrals 121
2. Der Satz von der monotonen Konvergenz 124
3. Kurzbiographie von B. LEVI 125
4. Maße mit Dichten 125
Aufgaben 126

§ 3. Integrierbare Funktionen 127
1. Integrierbare Funktionen 127
2. Linearität und Monotonie des Integrals 129
3. Der Raum $\mathcal{L}^1$ 131
4. Stetige Funktionen mit kompaktem Träger 132
5. Integration über meßbare Teilmengen 133
6. Historische Anmerkungen 135
7. Kurzbiographie von W.H. YOUNG 136
Aufgaben 137

§ 4. Fast überall bestehende Eigenschaften 138
Aufgaben 141

§ 5. Konvergenzsätze 142
1. Das Lemma von FATOU 142
2. Kurzbiographie von P. FATOU 143
3. Der Satz von der majorisierten Konvergenz 143
4. Von einem Parameter abhängige Integrale 145
5. Der Satz von SCHEFFÉ 148
Aufgaben 148

§ 6. Riemann-Integral und Lebesgue-Integral 149
1. Eigentliches Riemann-Integral und Lebesgue-Integral 150
2. Uneigentliches Riemann-Integral und Lebesgue-Integral 151
3. Mittelwertsätze der Integralrechnung 154
4. Kurzbiographie von H. LEBESGUE 156
Aufgaben 158

Kapitel V. Produktmaße, Satz von FUBINI *und Transformationsformel* 161

§ 1. Produktmaße 161
1. Produkt-σ-Algebren 162
2. Produktmaße 162
3. Das Cavalierische Prinzip 167
4. Produkte endlich vieler Maßräume 168
5. Das p-dimensionale äußere Hausdorff-Maß 169
Aufgaben 171

§ 2. Der Satz von FUBINI 173
1. Der Satz von FUBINI 173
2. Historische Anmerkungen 178
3. Beispiele für Anwendungen des Satzes von FUBINI 179
4. Der Gaußsche Integralsatz für die Ebene 182
5. Kurzbiographien von G. FUBINI und L. TONELLI 185
Aufgaben 186

§ 3. Faltung und Fourier-Transformation 189
1. Integration in bezug auf Bildmaße 189
2. Transformation von Maßen mit Dichten 190
3. Die Faltung auf $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^p, \mathfrak{B}^p, \beta^p)$ 191
4. Die Fourier-Transformation 193
Aufgaben 198

§ 4. Die Transformationsformel 199
1. Die Transformationsformel 200
2. Der Satz von SARD 207
3. Verallgemeinerte Transformationsformel 209
4. Transformation von Maßen mit Dichten bez. λ^p 209
5. Der Brouwersche Fixpunktsatz 211
Aufgaben 214

Kapitel VI. Konvergenzbegriffe der Maß- und Integrationstheorie 218

§ 1. Die Ungleichungen von JENSEN, HÖLDER und MINKOWSKI 218
1. Die Jensensche Ungleichung 219
2. Die Höldersche Ungleichung 221
3. Die Minkowskische Ungleichung 223
4. Historische Anmerkungen 224
Aufgaben 225

§ 2. Die Räume L^p und der Satz von RIESZ–FISCHER 227
1. Die Räume $\mathcal{L}^p$ und L^p 228
2. Der Satz von RIESZ–FISCHER 229
3. Die Banach-Algebra $L^1(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}^n, \beta^n)$ 232
4. Der Hilbert-Raum $L^2(\mu)$ 233
5. Der Banach-Verband $L^p_{\mathbb{R}}$ 238
6. Dichte Unterräume von L^p 240
7. Der Satz von PLANCHEREL 242
8. Der Satz von FATOU über Potenzreihen 242
9. Historische Anmerkungen 243
10. Kurzbiographien von F. RIESZ und E. FISCHER 244
Aufgaben 246

§ 3. Der Satz von JEGOROW 248
1. Konvergenz μ-fast überall 248
2. Fast gleichmäßige Konvergenz 249
3. Kurzbiographie von D.F. JEGOROW 250
Aufgaben 251

§ 4. Konvergenz nach Maß 252
1. Konvergenz nach Maß und lokal nach Maß 252
2. Cauchy-Folgen für die Konvergenz nach Maß 253
3. Vergleich der Konvergenzbegriffe 255
4. Charakterisierung der Konvergenz n.M. und der Konvergenz lokal n.M. 256
Aufgaben 257

§ 5. Konvergenz in $\mathcal{L}^p$ 258
1. Der Satz von PRATT 258
2. Konvergenz in $\mathcal{L}^p$ 259
3. Der Konvergenzsatz von VITALI 260
4. Schwache Konvergenz in $\mathcal{L}^p$ 261
Aufgaben 265

Kapitel VII. Absolute Stetigkeit 267

§ 1. Signierte Maße; Hahnscher und Jordanscher Zerlegungssatz 267
1. Signierte Maße 267
2. Der Hahnsche Zerlegungssatz 269
3. Positive Variation, negative Variation und Variation 270
4. Jordanscher Zerlegungssatz 271
5. Der Banach-Verband der endlichen signierten Maße 272
6. Kurzbiographie von H. HAHN 273
Aufgaben 274

§ 2. Der Satz von RADON–NIKODÝM und der Lebesguesche Zerlegungssatz 277
1. Absolute Stetigkeit 277
2. Der Satz von RADON–NIKODÝM 277
3. Kurzbiographie von O. NIKODÝM 282
4. Der Lebesguesche Zerlegungssatz 283
Aufgaben 285

§ 3. Der Dualraum von L^p $(1 \leq p < \infty)$ 286
1. Der Dualraum von $L^p(\mu)$ $(1 \leq p < \infty)$ 286
2. Die multiplikativen Linearformen auf der Banach-Algebra $L^1(\mu_m)$ 291
Aufgaben 292

§ 4. Absolut stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$ 294
1. Der Überdeckungssatz von VITALI 294
2. Differenzierbarkeit monotoner Funktionen λ-f.ü. 296
3. Der Dichtesatz 299
4. Absolut stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$ 300
5. Lebesguesche Zerlegung Lebesgue–Stieltjesscher Maße 304
6. Rektifizierbare Kurven 306
Aufgaben 307

Kapitel VIII. Maße auf topologischen Räumen 309

§ 1. Borel-Maße, Radon-Maße, Regularität 310
1. Grundbegriffe 310
2. Regularitätssätze 314
3. Moderate Borel-Maße 315
4. Regularität von Borel-Maßen 316
5. Regularität von Borel-Maßen auf polnischen Räumen 317
6. Der Satz von LUSIN 320
7. Kurzbiographie von N.N. LUSIN 321
Aufgaben 323

§ 2. Der Darstellungssatz von F. RIESZ 325
1. Problemstellung 325
2. Fortsetzungssatz 326
3. Der Darstellungssatz von F. RIESZ für lokal-kompakte Räume 331
4. Der Darstellungssatz von F. RIESZ für vollständig reguläre Räume 335
5. Träger von Maßen 339
6. Der Darstellungssatz von F. RIESZ für stetige Linearformen auf $C_0(X)$ 342
Aufgaben 346

§ 3. Das Haarsche Maß 348
1. Topologische Gruppen 348
2. Linksinvariante Linearformen und Maße 351
3. Existenz und Eindeutigkeit des Haarschen Maßes 353
4. Anwendungen des Haar-Maßes 362
5. Invariante und relativ invariante Maße auf Restklassenräumen 365
6. Kurzbiographie von A. HAAR 371
Aufgaben 372

Anhang A. Topologische Räume 375

Anhang B. Transfinite Induktion 379

Literaturverzeichnis 381

Namenverzeichnis 387

Symbolverzeichnis 392

Sachverzeichnis 393