

Gustav Feichtinger · Richard F. Hartl

# **Optimale Kontrolle ökonomischer Prozesse**

Anwendungen des Maximumprinzips  
in den Wirtschaftswissenschaften



Walter de Gruyter · Berlin · New York 1986

# Inhaltsverzeichnis

## Teil I. Das Maximumprinzip:

<b>Notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen</b> .....	1
<b>Kapitel 1: Dynamische Entscheidungsprozesse</b> .....	3
1.1. Das Kontrollproblem.....	3
1.2. Motivierende Beispiele.....	5
1.3. Lösungskonzepte und historische Bemerkungen.....	11
Übungsbeispiele zu Kapitel 1.....	12
Weiterführende Bemerkungen und Literatur zu Kapitel 1 .....	14
<b>Kapitel 2: Heuristische Herleitung und ökonomische Interpretation des Maximumprinzips</b> .....	16
2.1. Notwendige Optimalitätsbedingungen für ein Standardmodell.....	16
2.2. Ein „Beweis“ über die dynamische Programmierung .....	24
2.3. Ökonomische Deutung des Maximumprinzips .....	28
2.4. Zusammenhang mit der Variationsrechnung.....	32
2.5. Hinreichende Bedingungen.....	34
2.6. Unendlicher Zeithorizont und Gleichgewichtslösung .....	39
2.7. Optimale Wahl des Endzeitpunktes .....	44
2.8. Optimaler Endzeitpunkt bei Investitionsketten.....	47
Übungsbeispiele zu Kapitel 2.....	49
Weiterführende Bemerkungen und Literatur zu Kapitel 2 .....	50
<b>Teil II: Strukturanalyse von Kontrollmodellen</b> .....	53
<b>Kapitel 3: Lineare optimale Kontrollmodelle</b> .....	55
3.1. Ein lineares Instandhaltungsmodell .....	56
3.2. Optimale Ausbildung im Lebenszyklus.....	59
3.3. Raschestmögliche Annäherung an eine singuläre Lösung: Eine Anwendung des Integralsatzes von Green .....	66
3.4. Zeitoptimale Probleme .....	74
3.5. Modelle mit konvexer Hamiltonfunktion: „chattering control“.....	78
Übungsbeispiele zu Kapitel 3.....	81
Weiterführende Bemerkungen und Literatur zu Kapitel 3 .....	83
<b>Kapitel 4: Konkave Modelle mit einer Zustandsvariablen</b> .....	84
4.1. Ein quadratisches Instandhaltungsmodell .....	85
4.2. Phasendiagrammanalyse bei einer Steuerung.....	88
4.2.1. Zustands-Kozustands-Phasenporträt .....	90
4.2.2. Zustands-Kontroll-Phasenporträt .....	94
4.2.3. Existenz, Eindeutigkeit, Sensitivität und ökonomische Interpretation des Gleichgewichtes .....	96
4.3. Phasendiagrammanalyse bei zwei gegenläufigen Steuerungen.....	100
4.3.1. Zustands-Kozustands-Phasenporträt .....	101

4.3.2. Zustands-Kontroll-Phasenporträts .....	105
4.3.3. Sensitivitätsanalyse des Gleichgewichtes .....	106
4.4. Mehrere Kontrollen und komparativ dynamische Analyse .....	108
4.4.1. Dynamische Sensitivitätsanalyse bezüglich der Diskontrate .....	110
4.4.2. Dynamische Sensitivitätsanalyse bezüglich des Planungshorizontes .....	112
4.5. Bestimmung der optimalen Lösung im Phasenporträt .....	115
4.5.1. Globale Existenz des Sattelpunktspfades .....	115
4.5.2. Optimale Lösung bei Strudelpunkten .....	116
4.5.3. Monotonie des Zustandspfades in autonomen Steuerungsproblemen .....	119
Übungsbeispiele zu Kapitel 4 .....	120
Weiterführende Bemerkungen und Literatur zu Kapitel 4 .....	121
<b>Kapitel 5: Nichtlineare Modelle mit mehr als einem Zustand .....</b>	<b>122</b>
5.1. Isoperimetrische Beschränkungen: Budgetmodelle .....	122
5.2. Zustandsseparable Modelle .....	126
5.3. Linearisierung des kanonischen Differentialgleichungssystems .....	133
5.3.1. Lokale Stabilitätsanalyse .....	133
5.3.2. Analyse in der stabilen Mannigfaltigkeit .....	135
5.3.3. Beispiel: Optimale Inflation und Arbeitslosenrate .....	136
5.4. Linear-quadratische Modelle .....	140
5.5. Global asymptotische Stabilität und Ljapunov-Methode .....	146
5.5.1. Der Ansatz über die Wertfunktion .....	148
5.5.2. Der Ansatz von Cass und Shell .....	150
5.5.3. Der Ansatz von Brock und Scheinkman .....	152
5.5.4. Abschließende Bemerkungen zur asymptotischen Stabilität .....	153
Übungsbeispiele zu Kapitel 5 .....	154
Weiterführende Bemerkungen und Literatur zu Kapitel 5 .....	155
<b>Teil III: Erweiterungen des Standardmodells .....</b>	<b>157</b>
<b>Kapitel 6: Dynamische Systeme mit Pfadrestriktionen und Endbedingungen</b> .....	<b>159</b>
6.1. Endbedingungen und zustandsabhängige Nebenbedingungen für die Kontrollvariablen .....	160
6.2. Reine Zustandsnebenbedingungen .....	164
6.2.1. Direkte Methode .....	165
6.2.2. Indirekte Methode .....	169
6.2.3. Zusammenhang zwischen direkter und indirekter Methode .....	171
6.2.4. Eine Variante des indirekten Ansatzes: Die Methode von Hestenes und Russak .....	174
6.2.5. Ökonomische Interpretation und Beschränkungen höherer Ordnung .....	175
Übungsbeispiele zu Kapitel 6 .....	177
Weiterführende Bemerkungen und Literatur zu Kapitel 6 .....	178
<b>Kapitel 7: Verschiedene Erweiterungen .....</b>	<b>180</b>
7.1. Erweiterung der hinreichenden Bedingungen .....	180
7.2. Unendlicher Zeithorizont .....	186
7.3. Probleme mit freiem Endzeitpunkt .....	188
7.4. Freier Anfangszustand .....	189
7.5. Existenz einer optimalen Lösung .....	191
Übungsbeispiele zu Kapitel 7 .....	192
Weiterführende Bemerkungen und Literatur zu Kapitel 7 .....	193

Kapitel 8: Beispiele .....	195
8.1. Anwendung der Kuhn-Tucker-Bedingungen .....	195
8.2. Endbedingungen .....	197
8.3. Zustandsabhängige Pfadrestriktionen für die Steuerung .....	201
8.4. Reine Zustandsnebenbedingungen .....	212
8.5. Freier Anfangszustand .....	231
Übungsbeispiele zu Kapitel 8 .....	234
Weiterführende Bemerkungen und Literatur zu Kapitel 8 .....	236
<b>Teil IV: Fallstudien</b> .....	237
Kapitel 9: Produktion und Lagerhaltung .....	239
9.1. Minimierung von Produktions- und Lagerkosten bei gegebener Nachfrage .....	239
9.1.1. Das HMMS-Modell .....	240
9.1.2. Lineare Produktions- und Lagerkosten .....	241
9.1.3. Lineare Lager- und konvexe Produktionskosten: Das Arrow-Karlin-Modell .....	242
9.1.4. Ein „Vorwärtsalgorithmus“ für das Arrow-Karlin-Modell .....	247
9.1.5. Entscheidungs- und Prognosehorizont .....	253
9.1.6. Produktionsglättung bei Lagerobergrenze .....	255
9.1.7. Lineare Produktions- und konvexe Lager- bzw. Fehlmengenkosten .....	258
9.2. Simultane Preis- und Produktionsentscheidungen .....	261
9.2.1. Das Modell von Pekelman .....	261
9.2.2. Ein „Vorwärtsalgorithmus“ für das Pekelman-Modell .....	266
9.2.3. Eine autonome Version mit konvexen Lager- und Produktionskosten .....	269
9.3. Weitere Ansätze .....	274
9.3.1. Ein Spekulationsmodell: „Wheat Trading“ .....	274
9.3.2. Produktionsglättung bei fluktuierendem Preis .....	277
Übungsbeispiele zu Kapitel 9 .....	279
Weiterführende Bemerkungen und Literatur zu Kapitel 9 .....	281
Kapitel 10: Instandhaltung und Ersatz .....	283
10.1. Das Modell von Kamien und Schwartz .....	287
10.2. Das Modell von Thompson .....	291
10.2.1. Die lineare Version .....	291
10.2.2. Eine nichtlineare Version .....	294
10.3. Optimale Instandhaltung und Inanspruchnahme einer Produktionsanlage .....	295
10.3.1. Das Modell von Hartl .....	295
10.3.2. Eine linear-konkave Version .....	298
10.3.3. Eine nichtzustandsseparable Variante .....	306
Übungsbeispiele zu Kapitel 10 .....	308
Weiterführende Bemerkungen und Literatur zu Kapitel 10 .....	310
Kapitel 11: Marketing Mix: Preis, Werbung und Produktqualität .....	313
11.1. Optimale Werbestrategien .....	313
Das Dorfman-Steiner-Modell .....	313
11.1.1. Werbekapitalmodelle .....	314
Das Nerlove-Arrow-Modell .....	314
Die Erweiterung von Gould .....	318
Das Modell von Jacquemin .....	320
Das Modell von Schmalensee .....	321
11.1.2. Diffusionsmodelle .....	322

Das Vidale-Wolfe-Modell .....	323
Erstes Diffusionsmodell von Gould .....	324
Zweites Diffusionsmodell von Gould .....	325
Werbung für langlebige Gebrauchsgüter (Horsky und Simon) .....	331
11.2. Strategisches Preismanagement .....	334
11.2.1. Optimale Preispolitik bei dynamischer Nachfrage und Kostenfunktion (Kalish) .....	335
Separable Nachfrage .....	339
Preisabhängiges Marktpotential .....	341
11.2.2. Preispolitik bei drohendem Markteintritt von Konkurrenten (Gaskins) ..	342
11.3. Interaktion von Preis und Werbung .....	346
11.3.1. Optimales Marketing-Mix bei atomistischer Marktstruktur (Phelps und Winter, Luptacik, Feichtinger) .....	346
11.3.2. Optimale Preis- und Werbestrategien für langlebige Konsumgüter .....	350
11.4. Produktqualität .....	353
Das Modell von Kotowitz und Mathewson .....	354
Übungsbeispiele zu Kapitel 11 .....	358
Weiterführende Bemerkungen und Literatur zu Kapitel 11 .....	361
<b>Kapitel 12: Unternehmenswachstum: Investition, Finanzierung und Beschäf-</b> <b>tigung .....</b>	<b>365</b>
12.1. Das Modell von Jorgenson .....	365
12.2. Das Modell von Lesourne und Leban .....	368
12.2.1. Lösung mittels des Greenschen Theorems .....	369
Substitution zwischen Kapital und Arbeit im Laufe des Firmenwachstums	375
12.2.2. Lösung mittels Pfadverknüpfung .....	379
Ermittlung der zulässigen Pfade .....	380
Lösung des Syntheseproblems:	
Verknüpfung der zulässigen Pfade zu optimalen Strategien .....	386
12.2.3. Eine nichtlineare Version .....	393
12.3. Profitbeschränkung einer monopolistischen Firma: Der Averch-Johnson-Effekt.	394
12.3.1. Der statische AJ-Effekt .....	395
12.3.2. Ein dynamisches Modell bei Gewinnrestriktion .....	397
12.3.3. Verschiedene Modellvarianten .....	402
Lineare Investitionskosten .....	402
Der Fall nicht voll ausgenützter Produktionsfaktoren .....	403
Konvex-konkave Produktionsfunktion .....	404
Übungsbeispiele zu Kapitel 12 .....	404
Weiterführende Bemerkungen und Literatur zu Kapitel 12 .....	407
<b>Kapitel 13: Kapitalakkumulation .....</b>	<b>409</b>
13.1. Das Ramsey-Modell .....	409
13.1.1. Das neoklassische Wachstumsmodell .....	409
13.1.2. Konkave Nutzen- und Produktionsfunktion .....	411
13.1.3. Linearer Konsumnutzen .....	413
13.1.4. Konvexe und konvex-konkave Nutzenfunktion .....	414
13.1.5. Konvex-konkave Produktionsfunktion .....	418
13.2. Erweiterungen des Ramsey-Modells .....	420
13.2.1. Kapitalakkumulation und Umweltverschmutzung .....	420
13.2.2. Kapitalakkumulation und Ressourcenabbau .....	422
13.3. Humankapital .....	425
Übungsbeispiele zu Kapitel 13 .....	427
Weiterführende Bemerkungen und Literatur zu Kapitel 13 .....	429

<b>Kapitel 14: Ressourcenmanagement</b> .....	431
14.1. Nicht erneuerbare Ressourcen.....	432
14.1.1. Verschiedene Marktformen bei vernachlässigbaren Extraktionskosten ...	432
Gegebene Preistrajektorie .....	432
Vollständige Konkurrenz.....	434
Der Monopolfall.....	435
Soziales Optimum.....	437
14.1.2. Monopolistische Ressourcenextraktion bei bestandsabhängigen Abbaukosten.....	439
14.2. Erneuerbare Ressourcen .....	441
14.2.1. Bioökonomische Grundbegriffe und das Gordon-Schaefer-Modell .....	442
Der Fall freien Zuganges (open-access fishery).....	444
14.2.2. Optimale Fangpolitiken bei verschiedenen Marktformen .....	446
Gegebene Preistrajektorie .....	446
Der Monopolfall .....	449
Soziales Optimum .....	450
14.2.3. Das Beverton-Holt-Modell .....	452
Übungsbeispiele zu Kapitel 14.....	454
Weiterführende Bemerkungen und Literatur zu Kapitel 14 .....	456
<b>Kapitel 15: Umweltschutz</b> .....	459
15.1. Das Modell von Forster .....	459
15.2. Das Modell von Luptacik und Schubert .....	462
15.3. Das Modell von Hartl und Luptacik .....	466
15.3.1. Statische Aktivitätsanalyse .....	468
15.3.2. Dynamische Aktivitätsanalyse .....	472
15.3.3. Modellvarianten .....	474
Übungsbeispiele zu Kapitel 15 .....	475
Weiterführende Bemerkungen und Literatur zu Kapitel 15 .....	475
<b>Kapitel 16: Sonstige Kontrollmodelle</b> .....	477
16.1. Forschung und Entwicklung .....	478
16.2. Bedienungstheorie.....	478
16.3. Anwendungen in der Raumplanung .....	479
16.4. Biomedizinische Anwendungen.....	480
16.5. Militärische Anwendungen.....	481
16.6. Verschiedene weitere Anwendungen des Maximumprinzips .....	482
<b>Teil V: Anhänge</b>	
A.1. Numerische Methoden.....	487
A.1.1. Nullstellenverfahren und statische Optimierung (Einfache Fixpunktiteration, Bisektion, Sekantenverfahren, Newtonverfahren, Gradientenverfahren, Methode der konjugierten Gradienten, Homotopieverfahren) ..	487
A.1.2. Dynamische Fixpunktiteration (Sukzessive Approximation).....	492
A.1.3. Einfaches Schießverfahren .....	493
A.1.4. Mehrzielmethode .....	495
A.1.5. Quasilinearisierung .....	496
A.1.6. Methode der konjugierten Gradienten .....	497
A.1.7. Kollokationsverfahren .....	499
A.1.8. Variationen zweiter Ordnung.....	501
A.1.9. Abschließende Bemerkungen zur Verwendung existierender Software .....	502

A.2. Das diskrete Maximumprinzip .....	504
A.3. Nichtdifferenzierbare Erweiterungen .....	510
A.4. Systeme mit Verzögerungen .....	517
A.5. Systeme mit verteilten Parametern .....	522
A.6. Impulskontrollen und Sprünge in den Zustandsvariablen .....	528
A.7. Differentialspiele .....	533
A.7.1. Nash-Gleichgewicht .....	535
A.7.2. Stackelberg-Gleichgewicht .....	537
A.7.3. Nullsummenspiele .....	540
A.7.4. Kooperative Lösungen .....	541
Pareto Gleichgewicht .....	541
Drohstrategien .....	542
A.7.5. Kapitalismusspiel .....	544
A.7.6. Verhandlungsspiel .....	551
A.7.7. Ergänzende Bemerkungen .....	553
A.8. Stochastische Kontrolltheorie .....	555
A.9. Dezentrale hierarchische Kontrolle .....	561
Interaktions-Schätzung .....	564
Interaktions-Ausgleich .....	565
Literatur .....	573
Personenverzeichnis .....	613
Sachverzeichnis .....	619