

MATLAB **in der Regelungstechnik**

Analyse linearer Systeme

Von Professor Dr.-Ing. Helmut Bode
Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden

Mit 107 Bildern



B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig 1998

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	1
2 Einführung in MATLAB	5
2.1 Eingaben, Kommandos, Operationen, Werte und Funktionen	5
2.1.1 Eingaben	5
2.1.2 Allgemeine Kommandos	7
2.1.3 Operationen	9
2.1.4 Spezielle Werte	10
2.1.5 Spezielle Funktionen	11
2.2 Matrizen, Vektoren, Skalare und Polynome	13
2.2.1 Matrizen und ihre Elemente	13
2.2.1.1 Eingabe von Matrixelementen	13
2.2.1.2 Kennzeichnung und Ansprache von Elementen einer Matrix	15
2.2.1.3 Auswahl von Elementen oder Reihen einer Matrix	15
2.2.2 Vektoren	16
2.2.3 Bilden erweiterter Matrizen	17
2.2.3.1 Stapeln von Matrizen	17
2.2.3.2 Aneinanderreihen von Matrizen	18
2.2.3.3 Erweitern von Matrizen durch Hinzufügen neuer Elemente	19
2.2.4 Bilden neuer Matrizen durch das Streichen von Reihen	19
2.2.5 Skalare	20
2.2.6 Spezielle Matrizen	20
2.2.6.1 Nullmatrix	20
2.2.6.2 Quadratische Nullmatrix vom Typ (n,n)	20
2.2.6.3 Einsmatrix	21
2.2.6.4 Quadratische Einsmatrix vom Typ (n,n)	21
2.2.6.5 Einheitsmatrix	21
2.2.6.6 Leermatrix - empty matrix []	22
2.2.7 Polynome	22
2.2.7.1 Multiplikation von Polynomen mit <i>conv</i>	23
2.2.7.2 Division von Polynomen mit <i>deconv</i>	24
2.3 Operationen mit Matrizen und Vektoren	25
2.3.1 Transponierte Matrix zur Matrix A	25
2.3.2 Addition und Subtraktion von Matrizen gleichen Typs	25
2.3.3 Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar	26

2.3.4 Operationen mit Vektoren - Element-mit-Element.....	27
2.3.4.1 Vektor-Multiplikation, Element-mit-Element	27
2.3.4.2 Vektor-Division linksseitig, Element-mit-Element	27
2.3.4.3 Vektor-Division rechtsseitig, Element-mit-Element.....	28
2.3.4.4 Potenzen von Vektoren.....	28
2.3.5 Multiplikation von Matrizen.....	29
2.4 Eigenschaften von Matrizen.....	30
2.4.1 Die Inverse einer Matrix mit <i>inv</i>	30
2.4.2 Rang einer Matrix mit <i>rank</i>	31
2.4.3 Eigenschaften einer quadratischen Matrix	31
2.4.4 Determinante einer Matrix mit <i>det</i>	31
2.4.5 Singuläre und nichtsinguläre Matrizen	32
2.5 MATLAB-Dateien.....	33
2.5.1 Skriptdateien	34
2.5.2 Funktionsdateien	34
2.6 Graphische Darstellungen.....	34
2.6.1 Graphische Darstellungen mit <i>plot</i>	35
2.6.2 Halblogarithmische Darstellungen mit <i>semilogx</i>	36
2.6.3 Beschriftung der Graphiken mit <i>title</i> , <i>xlabel</i> , <i>ylabel</i> und <i>text</i>	36
3 Systeme und ihre mathematischen Modelle	38
3.1 System Stab-Wagen	38
3.1.1 Verallgemeinerte Koordinaten des Systems Stab-Wagen.....	39
3.1.1.1 Schwerpunkt des Stabes.....	39
3.1.1.2 Symbolische Berechnung der Schwerpunktkoordinaten	40
3.1.1.3 Schwerpunkt des Wagens	41
3.1.2 System Stab-Wagen - Nichtlineares Modell	41
3.1.2.1 Allgemeiner Gleichungsansatz	42
3.1.2.2 Verallgemeinerte Koordinaten.....	43
3.1.2.3 Kinetische Energien	43
3.1.2.4 Potentielle Energie	44
3.1.2.5 Dissipative Energie	44
3.1.2.6 Potentiale	44
3.1.2.7 Ableitung der Energiebilanz nach dem Winkel.....	45
3.1.2.8 Nichtlineare Differentialgleichung des Winkels.....	45
3.1.2.9 Symbolische Ermittlung der n.l. Differentialgleichung des Winkels.....	46
3.1.2.10 Ableitung der Energiebilanz nach dem Weg.....	47
3.1.2.11 Nichtlineare Differentialgleichung des Weges	47
3.1.2.12 Nichtlineare Differentialgleichungen des Systems Stab-Wagen.....	48
3.1.3 System Stab-Wagen - Linearisiertes Modell -.....	48

3.1.3.1	Linearisierung und Vereinfachung der Modellgleichungen.....	48
3.1.3.2	Symbolische Lösung der linearen Beschleunigungsgleichungen	49
3.1.3.3	Modellgleichungen des Systems Stab-Wagen mit den Koeffizienten	50
3.1.4	Überführung der linearisierten Modelle in den Zustandsraum.....	51
3.1.4.1	Wahl der Zustandsgrößen - 1. Schritt	52
3.1.4.2	Bestimmen der Eingangsgrößen - 2. Schritt.....	53
3.1.4.3	Auffinden der Differentialgleichungen 1. Ordnung - 3. Schritt	53
3.1.4.4	Zusammenfassen der Differentialgleichungen zu Paaren - 4. Schritt	54
3.1.4.5	Vektor-Matrix-Differentialgleichungen der Teilsysteme - 5. Schritt.	54
3.1.4.6	Auswahl der Ausgangsgrößen für die Teilsysteme - 6. Schritt.....	55
3.1.4.7	Signalflußbilder der Teilsysteme - 7. Schritt.....	56
3.1.5	Bilden des Gesamtmodells Stab-Wagen im Zustandsraum	57
3.1.5.1	Reihenschaltung der beiden Teilsysteme.....	57
3.1.5.2	Gesamtschaltung durch Rückführung der Geschwindigkeit	58
3.1.6	Koeffizienten und Zustandsgleichungen des linearen Modells.....	60
3.1.6.1	Koeffizienten des Systems Stab.....	60
3.1.6.2	Zustandsgleichungen des Systems Stab.....	61
3.1.6.3	Koeffizienten des Systems Wagen	61
3.1.6.4	Zustandsgleichungen des Systems Wagen.....	62
3.1.6.5	Zustandsgleichungen des Systems Stab-Wagen.....	62
3.1.6.6	Modell des Systems Stab-Wagen mit <i>blkbuild</i> , <i>connect</i> und <i>printsys</i>	62
3.1.7	Eigenwerte des Systems Stab-Wagen mit <i>eig</i> und <i>esort</i>	64
3.2	Gleichstrom-Nebenschluß-Motor	65
3.2.1	Grundgleichungen - elektrische Seite.....	66
3.2.1.1	Spannungsbilanz	66
3.2.1.2	Geschwindigkeit des Winkels und der eines Seilpunktes.....	66
3.2.1.3	Im Motor induzierte Spannung.....	67
3.2.1.4	Differentialgleichung für den Ankerstrom	67
3.2.2	Grundgleichungen - mechanische Seite	67
3.2.2.1	Mechanisch-elektrische Kopplung des Motors	67
3.2.2.2	Beschleunigungsmoment	68
3.2.2.3	Lastmoment	68
3.2.2.4	Gesamtmoment des Motors	68
3.2.2.5	Differentialgleichung für die Geschwindigkeit eines Seilpunktes	69
3.2.3	Zustandsbeschreibung des Gleichstrom-Nebenschluß-Motors	69
3.2.3.1	Vektor-Matrix-Differentialgleichung	69
3.2.3.2	Vektor-Matrix-Ausgangsgleichung.....	70
3.2.4	Koeffizienten und Zustandsgleichungen des Motormodells	71
3.2.4.1	Koeffizienten des Motormodells	71
3.2.4.2	Zustandsgleichungen des Gleichstrom-Nebenschluß-Motors.....	72
3.2.5	Eigenwerte des Motors mit <i>eig</i> und <i>esort</i>	72
3.2.6	Vereinfachtes Modell des Gleichstrom-Nebenschluß-Motors	73

3.2.6.1 Grundgleichungen - elektrische Seite	73
3.2.6.2 Grundgleichungen - mechanische Seite	74
3.2.6.3 Reduziertes Modell des Gleichstrom-Nebenschluß-Motors.....	74
3.2.6.4 Reduzieren der Modellordnung mit <i>modred</i> und <i>ssdelete</i>	75
3.2.7 Funktion zur Berechnung der Matrizen des Motormodells.....	77
3.3 Inverses Pendel.....	79
3.3.1 Die Zugkraft als Koppelgröße zwischen den Teilsystemen.....	79
3.3.2 Gesamtmodell des Inversen Pendels.....	80
3.3.2.1 Symbolischer Aufbau der Koeffizienten und ihre Werte.....	81
3.3.2.2 Matrizen in symbolischer und numerischer Form	83
3.3.2.3 Zustandsgleichungen des Inversen Pendels.....	84
3.3.3 Berechnung der Systemgleichungen mit <i>blkbuild</i> und <i>connect</i>	85
3.3.4 Eigenwerte des Inversen Pendels mit <i>eig</i> und <i>esort</i>	88
3.3.5 Funktion zur Berechnung der Matrizen des Inversen Pendels	88
3.4 Gleichspannungs-Netzgerät	91
3.4.1 OV in Subtrahierschaltung als Soll-Istwert-Vergleicher.....	92
3.4.2 Invertierender, gegengekoppelter OV als <i>PI</i> -Regler	94
3.4.2.1 Mathematische Beschreibung des Operationsverstärkers.....	94
3.4.2.2 Gleichungen des <i>PI</i> -Reglers.....	95
3.4.3 Signalfußbild des Soll-Istwert-Vergleichs mit dem <i>PI</i> -Regler	95
3.4.4 Leistungsverstärker als Stellglied.....	96
3.4.5 RLC-Glied als Glättungstiefpaß	96
3.4.5.1 Spannungsbilanz	96
3.4.5.2 Kondensatorspannung als Ausgangsgröße	97
3.4.5.3 Übertragungsfunktionen für die Kondensatorspannung.....	98
3.4.5.4 Strom des RLC-Gliedes als Ausgangsgröße	99
3.4.6 Die Regelstrecke.....	99
3.4.7 Übertragungsfunktion der Störung am Streckenausgang	100
3.4.8 Das Netzgerät als Regelkreis in der Standardform	100
3.4.8.1 Übertragungsfunktionen der offenen Kette.....	101
3.4.8.2 Gleichungen des Regelkreises.....	101
3.4.8.3 Führungsübertragungsfunktion.....	102
3.4.8.4 Störübertragungsfunktion	102
3.4.9 Fehlerfunktionen des geschlossenen Systems	103
3.4.9.1 Allgemeine Beziehung	103
3.4.9.2 Fehlerfunktion bei Führungsänderung	104
3.4.9.3 Fehlerfunktion bei Störgrößenänderung.....	104
3.4.10 Beschreibung der offenen Kette als Zustandsmodell.....	104
3.4.10.1 <i>PI</i> -Regler und Soll-Istwert-Vergleicher.....	104
3.4.10.2 Stellglied	105
3.4.10.3 RLC-Glied als Glättungstiefpaß.....	106

3.4.10.4 Zustandsmodell der Regelstrecke	106
3.4.10.5 Zustandsmodell der offenen Kette	106
3.4.11 Funktion zur Berechnung der Matrizen des Netzgerätes	107
3.5 Elektrisches Netzwerk - sprungfähiges System	109
3.5.1 Das mathematische Modell	110
3.5.2 Lineare, zeitinvariante Differentialgleichung 2. Ordnung	111
3.5.3 Übertragungsfunktion des sprungfähigen Netzwerkes	112
3.5.4 Zustandsraummodell	112
3.5.5 Funktion zur Berechnung der Matrizen des Netzwerkes	115
3.6 RLC-Netzwerk als Brückenschaltung	116
3.6.1 Mathematisches Modell	116
3.6.1.1 Maschengleichungen	117
3.6.1.2 Zustandsgrößen	117
3.6.1.3 Differentialgleichungen der Zustandsgrößen	117
3.6.1.4 Ausgangsgleichung	118
3.6.2 Vektor-Matrix-Gleichungen des Zustandsmodells	119
3.6.3 Eigenwerte der Brückenschaltung	120
3.6.4 Funktion zur Berechnung der Matrizen der Brückenschaltung	122
4 Mathematische Beschreibung linearer, zeitinvarianter Systeme 123	
4.1 Lineare Differentialgleichungen und ihre Lösung	124
4.1.1 Grundlagen	124
4.1.2 Symbolische Lösung mit <i>dsolve</i>	124
4.1.3 Allgemeine Aussagen zur numerischen Lösung	125
4.1.4 Die Funktionen <i>ode23</i> und <i>ode45</i>	126
4.2 Zustandsgleichungen	128
4.2.1 Allgemeine Aussagen zur Zustandsraumbeschreibung	129
4.2.2 Geometrische Deutung der Zustandsraumbeschreibung	130
4.2.3 Das Zustandsmodell	131
4.2.3.1 Systemgleichungen eines Mehrgrößensystems	132
4.2.3.2 Systemgleichungen eines Eingrößensystems	133
4.2.3.3 Vektor-Matrix-Signalfußbild der Systemgleichungen	133
4.2.4 Numerische Lösung mit <i>ode23</i> und <i>ode45</i>	133
4.2.4.1 Zustandsgleichungen für sprungfähige Eingrößensysteme	135
4.2.4.2 Numerische Lösung von Eingrößensystemen mit <i>ode45</i>	136
4.3 Die Laplace-Transformation	138
4.3.1 Definition der Laplace-Transformation	138
4.3.2 Die Funktionen <i>laplace</i> und <i>invlaplace</i>	139
4.3.3 Regeln für das Rechnen mit der Laplace-Transformation	141
4.3.3.1 Additionssatz	141

4.3.3.2 Ähnlichkeitssatz.....	142
4.3.3.3 Dämpfungssatz.....	143
4.3.3.4 Verschiebungssatz.....	144
4.3.3.5 Differentiationssatz.....	145
4.3.3.6 Integralsatz.....	146
4.3.3.7 Anfangswertsatz.....	147
4.3.3.8 Endwertsatz.....	148
4.3.4 Lösen von linearen, zeitinvarianten Differentialgleichungen.....	149
4.3.4.1 Bestandteile der Laplace-Transformierten einer Differentialgleichung.....	150
4.3.4.2 Partialbruchzerlegung.....	153
4.4 Die Übertragungsfunktion.....	159
4.4.1 Übertragungsfunktion in der Polynomform.....	159
4.4.1.1 Pole und Nullstellen mit <i>pzmap</i>	160
4.4.1.2 Polynomform mit <i>tf</i> - MATLAB 5.....	162
4.4.2 Übertragungsfunktion in der Pol-Nullstellen-Form.....	162
4.4.2.1 Pol-Nullstellen-Form mit <i>zpk</i> - MATLAB 5.....	163
4.4.3 Übertragungsfunktion in der Zeitkonstantenform.....	164
4.5 Der Frequenzgang.....	166
4.5.1 Die Antwort auf ein komplexes harmonisches Eingangssignal.....	166
4.5.2 Die Ortskurve als graphische Darstellung des Frequenzganges.....	167
4.5.3 Berechnung der Ortskurve mit <i>nyquist</i>	169
4.5.4 Spezielle Punkte der Ortskurve.....	169
4.5.4.1 $\omega = 0$ bei Übertragungsgliedern mit Ausgleich.....	169
4.5.4.2 $\omega = 0$ bei Übertragungsgliedern ohne Ausgleich.....	170
4.5.4.3 $\omega \rightarrow \infty$ bei Übertragungsgliedern mit oder ohne Ausgleich.....	171
4.6 Das Frequenz-Kennlinien-Diagramm.....	178
4.6.1 Systeme minimaler Phase und Allpaßglieder.....	178
4.6.2 Logarithmischer Amplituden- und Phasengang.....	179
4.6.2.1 Zerlegung des Frequenzganges in seinen Real- und Imaginärteil... ..	179
4.6.2.2 Zerlegung des Frequenzganges in seine Amplitude und Phase.. ..	180
4.6.3 Berechnung der Amplituden- und Phasengänge mit <i>bode</i>	181
4.6.4 Bode-Diagramme typischer Grundglieder.....	181
4.6.4.1 Das Proportionalglied, <i>P</i> -Glied.....	181
4.6.4.2 Verzögerungsglied 1. Ordnung, <i>PT</i> ₁ -Glied.....	182
4.6.4.3 Das Integrierglied, <i>I</i> -Glied.....	185
4.6.4.4 Vorhaltglied 1. Ordnung, <i>DT</i> ₁ -Glied.....	186
4.6.4.5 Differenzierglied, ideales <i>D</i> -Glied.....	187
4.6.4.6 Schwingungsglied, <i>PT</i> _{2d} -Glied.....	188
4.6.5 Bode-Diagramme von Systemen nichtminimaler Phase.....	194
4.6.5.1 Das Allpaßglied.....	194

4.6.5.2 Das Totzeitglied - T_t -Glied	194
4.7 Das Wurzelortverfahren.....	199
4.7.1 Einführung.....	199
4.7.2 Die Methode der Wurzelortskurve nach Evans.....	205
4.7.2.1 Die Wurzelortskurve mit <i>rlocus</i> und <i>rlocfind</i>	205
4.7.2.2 Grundlegende Regeln des Wurzelortverfahrens	207
4.7.3 Das Wurzelortverfahren für beliebige Faktoren.....	215
5 Testsignale und Zeitantworten	219
5.1 Anfangswertantwort mit <i>initial</i>	219
5.2 Sprungantwort - Übergangsfunktion	223
5.2.1 Einheitssprung	223
5.2.2 Sprungantwort.....	223
5.2.3 Übergangsfunktion	223
5.2.4 Die Übergangsfunktion mit <i>step</i>	224
5.3 Impulsantwort - Gewichtsfunktion	225
5.3.1 Die Impulsfunktion.....	225
5.3.2 Die Stoßfunktion	226
5.3.3 Die Gewichtsfunktion	227
5.3.4 Die Gewichtsfunktion mit <i>impulse</i>	228
5.4 Antwort auf ein beliebiges Signal mit <i>lsim</i>	230
6 Systemeigenschaften	236
6.1 Dämpfungsgrad und Eigenfrequenzen mit <i>damp</i>	236
6.1.1 Charakteristische Werte eines Schwingungsgliedes	236
6.1.2 Charakteristische Werte eines Übertragungsgliedes mit <i>damp</i>	238
6.2 Stationäre Verstärkung mit <i>dcgain</i>	241
6.3 Eigenschaften der Systemmatrix A	243
6.3.1 Lösungsansatz für die Eigenbewegung des Systems	243
6.3.2 Charakteristisches Polynom der Systemmatrix mit <i>poly</i>	246
6.3.3 Wurzeln des charakteristischen Polynoms mit <i>roots</i>	247
6.3.4 Eigenwerte und Eigenvektoren der Systemmatrix mit <i>eig</i>	247
6.3.5 Beispiel zu <i>poly</i> , <i>roots</i> und <i>eig</i>	247
6.4 Stabilität linearer Systeme	249
6.4.1.1 Lösungen der charakteristischen Gleichung.....	250
6.4.1.2 Das Hurwitz-Kriterium.....	252
6.4.1.3 Von der offenen Kette zum geschlossenen Kreis.....	253
6.4.1.4 Das Nyquist-Kriterium	254

6.4.1.5 Das allgemeine Nyquist-Kriterium	255
6.4.1.6 Berechnung von Stabilitätswerten mit <i>margin</i>	256
6.4.1.7 Stabile offene Systeme mit Totzeit	256
6.4.1.8 Beispiele zur Stabilität von geschlossenen Eingrößensystemen	257
6.5 Normalformen der Systemmatrix	261
6.5.1 Transformation der Zustandsgleichungen in die Diagonalform	261
6.5.1.1 Die Systemmatrix <i>A</i>	261
6.5.1.2 Transformation der Standardform in die Diagonalform	262
6.5.1.3 Transformation der Standardform in die Diagonalform mit <i>canon</i>	263
6.5.2 Regelungsnormalform für Eingrößensysteme	265
6.5.2.1 Regelungsnormalform aus der Standardform	266
6.5.2.2 Regelungsnormalform aus der Übertragungsfunktion	267
6.5.2.3 Regelungsnormalform mit <i>rn_form</i>	269
6.5.2.4 Beispiele zur Regelungsnormalform	271
6.5.3 Beobachtungsnormalform für Eingrößensysteme	272
6.5.3.1 Analogien zwischen der Beobachtungs- und Regelungsnormalform	273
6.5.3.2 Beobachtungsnormalform mit <i>bn_form</i>	273
6.5.3.3 Beispiele zur Beobachtungsnormalform	275
6.5.4 Regelungs- und Beobachtungsnormalform mit <i>ss2ss</i>	276
6.6 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit	277
6.6.1 Steuerbarkeit	277
6.6.2 Kriterium der Steuerbarkeit nach Kalman	280
6.6.2.1 Die Steuerbarkeitsmatrix und ihr Rang	280
6.6.2.2 Steuerbarkeitstest mit <i>ctrb</i>	281
6.6.3 Beobachtbarkeit	282
6.6.4 Kriterium der Beobachtbarkeit nach Kalman	284
6.6.4.1 Die Beobachtbarkeitsmatrix und ihr Rang	284
6.6.4.2 Beobachtbarkeitstest mit <i>obsv</i>	285
6.6.5 Kanonische Zerlegung	286
6.6.5.1 Zerlegung des Systems nach seiner Steuerbarkeit mit <i>ctrbf</i>	286
6.6.5.2 Zerlegung des Systems nach seiner Beobachtbarkeit mit <i>obsvf</i>	288
6.6.6 Minimalkonfiguration eines Systems mit <i>minreal</i>	290
7 Modelltransformationen	296
7.1 Pol-Nullstellen-Kürzung mit <i>minreal</i>	296
7.2 Zustandsmodelle	296
7.2.1 Transformation in die Polynomform mit <i>ss2tf</i>	297
7.2.2 Transformation in die Pol-Nullstellen-Form mit <i>ss2zp</i>	299

7.3 Übertragungsfunktion in Polynomform	301
7.3.1 Transformation in ein Zustandsraummodell mit <i>tf2ss</i>	301
7.3.2 Transformation in die Pol-Nullstellen-Form mit <i>tf2zp</i>	302
7.3.3 Transformation in Partialbrüche mit <i>residue</i>	303
7.4 Übertragungsfunktion in Pol-Nullstellen-Form	304
7.4.1 Transformation in die Polynomform mit <i>zp2tf</i>	304
7.4.2 Transformation in ein Zustandsmodell mit <i>zp2ss</i>	305
7.5 Vom Signalflußbild zum Zustandsmodell mit <i>blkbuild</i> und <i>connect</i> sowie <i>printsys</i>	306
8 Zusammenschalten von Systemen	309
8.1 Beschreibung durch Übertragungsfunktionen	309
8.1.1 Zwei Übertragungsglieder als Reihenschaltung mit <i>series</i>	309
8.1.2 Zwei Übertragungsglieder als Parallelschaltung mit <i>parallel</i>	311
8.1.3 Zwei Übertragungsglieder als Rückführschaltung	312
8.1.3.1 Rückführschaltung mit <i>feedback</i>	312
8.1.3.2 Rückführschaltung mit <i>cloop</i> - Regelkreis bei Führung -	314
8.2 Beschreibung durch Zustandsgleichungen	316
8.2.1 Vereinigung zweier ungekoppelter Systeme mit <i>append</i>	316
8.2.2 Zwei Zustandssysteme als Reihenschaltung mit <i>series</i>	317
8.2.3 Zwei Zustandssysteme als Parallelschaltung mit <i>parallel</i>	322
8.2.4 Zustandssysteme in Rückführschaltung	326
8.2.4.1 Rückführschaltung mit <i>feedback</i>	326
8.2.4.2 Rückführschaltung mit <i>cloop</i>	333
Verzeichnis der MATLAB Funktionen	341
Literaturverzeichnis	346
Namen- und Sachverzeichnis	349