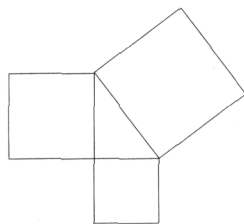


# Taschenbuch der Mathematik

I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew,  
G. Musiol, H. Mühlig

4., überarbeitete und erweiterte Auflage  
der Neubearbeitung



Verlag Harri Deutsch

# Inhaltsverzeichnis

## Tabellenverzeichnis

XXXIV

<b>1</b>	<b>Arithmetik</b>	<b>1</b>
1.1	Elementare Rechenregeln . . . . .	1
1.1.1	Zahlen . . . . .	1
1.1.1.1	Natürliche, ganze und rationale Zahlen . . . . .	1
1.1.1.2	Irrationale und transzendente Zahlen . . . . .	1
1.1.1.3	Reelle Zahlen . . . . .	2
1.1.2	Beweismethoden . . . . .	4
1.1.2.1	Direkter Beweis . . . . .	4
1.1.2.2	Indirekter Beweis oder Beweis durch Widerspruch . . . . .	4
1.1.2.3	Vollständige Induktion . . . . .	4
1.1.2.4	Konstruktiver Beweis . . . . .	5
1.1.3	Summen und Produkte . . . . .	5
1.1.3.1	Summen . . . . .	5
1.1.3.2	Produkte . . . . .	6
1.1.4	Potenzen, Wurzeln, Logarithmen . . . . .	7
1.1.4.1	Potenzen . . . . .	7
1.1.4.2	Wurzeln . . . . .	7
1.1.4.3	Logarithmen . . . . .	8
1.1.4.4	Spezielle Logarithmen . . . . .	8
1.1.5	Algebraische Ausdrücke . . . . .	9
1.1.5.1	Definitionen . . . . .	9
1.1.5.2	Einteilung der algebraischen Ausdrücke . . . . .	10
1.1.6	Ganzrationale Ausdrücke . . . . .	10
1.1.6.1	Darstellung in Form eines Polynoms . . . . .	10
1.1.6.2	Zerlegung eines Polynoms in Faktoren . . . . .	10
1.1.6.3	Spezielle Formeln . . . . .	11
1.1.6.4	Binomischer Satz . . . . .	11
1.1.6.5	Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier Polynome . . . . .	13
1.1.7	Gebrochenrationale Ausdrücke . . . . .	13
1.1.7.1	Rückführung auf die einfachste Form . . . . .	13
1.1.7.2	Bestimmung des ganzrationalen Anteils . . . . .	13
1.1.7.3	Partialbruchzerlegung . . . . .	14
1.1.7.4	Umformung von Proportionen . . . . .	16
1.1.8	Irrationale Ausdrücke . . . . .	16
1.2	Endliche Reihen . . . . .	17
1.2.1	Arithmetische Reihen . . . . .	17
1.2.2	Geometrische Reihe . . . . .	18
1.2.3	Spezielle endliche Reihen . . . . .	18
1.2.4	Mittelwerte . . . . .	18
1.2.4.1	Arithmetisches Mittel . . . . .	18
1.2.4.2	Geometrisches Mittel . . . . .	19
1.2.4.3	Harmonisches Mittel . . . . .	19
1.2.4.4	Quadratisches Mittel . . . . .	19
1.2.4.5	Vergleich der Mittelwerte für zwei positive Größen $a \leq b$ . . . . .	19
1.3	Finanzmathematik . . . . .	20
1.3.1	Prozentrechnung . . . . .	20

1.3.2	Zinseszinsrechnung . . . . .	21
1.3.3	Tilgungsrechnung . . . . .	22
1.3.3.1	Tilgung . . . . .	22
1.3.3.2	Gleiche Tilgungsraten . . . . .	22
1.3.3.3	Gleiche Annuitäten . . . . .	23
1.3.4	Rentenrechnung . . . . .	23
1.3.4.1	Rente . . . . .	23
1.3.4.2	Nachschüssig konstante Rente . . . . .	24
1.3.4.3	Kontostand nach $n$ Rentenzahlungen . . . . .	24
1.3.5	Abschreibungen . . . . .	25
1.4	Ungleichungen . . . . .	27
1.4.1	Reine Ungleichungen . . . . .	27
1.4.1.1	Definitionen . . . . .	27
1.4.1.2	Eigenschaften der Ungleichungen vom Typ I und II . . . . .	28
1.4.2	Spezielle Ungleichungen . . . . .	29
1.4.2.1	Dreiecksungleichung für reelle Zahlen . . . . .	29
1.4.2.2	Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen . . . . .	29
1.4.2.3	Ungleichungen für den Absolutbetrag der Differenz reeller Zahlen . . . . .	29
1.4.2.4	Ungleichung für das arithmetische und das geometrische Mittel . . . . .	29
1.4.2.5	Ungleichung für das arithmetische und das quadratische Mittel . . . . .	29
1.4.2.6	Ungleichungen für verschiedene Mittelwerte reeller Zahlen . . . . .	29
1.4.2.7	Bernoullische Ungleichung . . . . .	30
1.4.2.8	Binomische Ungleichung . . . . .	30
1.4.2.9	Cauchy-Schwarzsche Ungleichung . . . . .	30
1.4.2.10	Tschebyscheffsche Ungleichung . . . . .	30
1.4.2.11	Verallgemeinerte Tschebyscheffsche Ungleichung . . . . .	31
1.4.2.12	Höldersche Ungleichung . . . . .	31
1.4.2.13	Minkowskische Ungleichung . . . . .	31
1.4.3	Auflösung von Ungleichungen 1. und 2. Grades . . . . .	32
1.4.3.1	Allgemeines . . . . .	32
1.4.3.2	Ungleichungen 1. Grades . . . . .	32
1.4.3.3	Ungleichungen 2. Grades . . . . .	32
1.4.3.4	Allgemeiner Fall der Ungleichung 2. Grades . . . . .	32
1.5	Komplexe Zahlen . . . . .	33
1.5.1	Imaginäre und komplexe Zahlen . . . . .	33
1.5.1.1	Imaginäre Einheit . . . . .	33
1.5.1.2	Komplexe Zahlen . . . . .	33
1.5.2	Geometrische Veranschaulichung . . . . .	33
1.5.2.1	Vektordarstellung . . . . .	33
1.5.2.2	Gleichheit komplexer Zahlen . . . . .	34
1.5.2.3	Trigonometrische Form der komplexen Zahlen . . . . .	34
1.5.2.4	Exponentialform einer komplexen Zahl . . . . .	35
1.5.2.5	Konjugiert komplexe Zahlen . . . . .	35
1.5.3	Rechnen mit komplexen Zahlen . . . . .	35
1.5.3.1	Addition und Subtraktion . . . . .	35
1.5.3.2	Multiplikation . . . . .	36
1.5.3.3	Division . . . . .	36
1.5.3.4	Allgemeine Regeln für die vier Grundrechenarten . . . . .	36
1.5.3.5	Potenzieren einer komplexen Zahl . . . . .	37
1.5.3.6	Radizieren oder Ziehen der $n$ -ten Wurzel aus einer komplexen Zahl . . . . .	37
1.6	Algebraische und transzendente Gleichungen . . . . .	37
1.6.1	Umformung algebraischer Gleichungen auf die Normalform . . . . .	37

1.6.1.1	Definition	37
1.6.1.2	Systeme aus $n$ algebraischen Gleichungen	38
1.6.1.3	Überzählige Wurzeln	38
1.6.2	Gleichungen 1. bis 4. Grades	39
1.6.2.1	Gleichungen 1. Grades (lineare Gleichungen)	39
1.6.2.2	Gleichungen 2. Grades (quadratische Gleichungen)	39
1.6.2.3	Gleichungen 3. Grades (kubische Gleichungen)	40
1.6.2.4	Gleichungen 4. Grades	41
1.6.2.5	Gleichungen 5. und höheren Grades	42
1.6.3	Gleichungen $n$ -ten Grades	42
1.6.3.1	Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Gleichungen	42
1.6.3.2	Gleichungen mit reellen Koeffizienten	43
1.6.4	Rückführung transzendenter Gleichungen auf algebraische	44
1.6.4.1	Definition	44
1.6.4.2	Exponentialgleichungen	45
1.6.4.3	Logarithmische Gleichungen	45
1.6.4.4	Trigonometrische Gleichungen	45
1.6.4.5	Gleichungen mit Hyperbelfunktionen	46

## 2 Funktionen und ihre Darstellung

2	Funktionsbegriff	47
2.1	Definition der Funktion	47
2.1.1	Funktion	47
2.1.1.1	Reelle Funktion	47
2.1.1.2	Funktion von mehreren Veränderlichen	47
2.1.1.3	Komplexe Funktion	47
2.1.1.4	Methoden zur Definition einer reellen Funktion	47
2.1.2	Angabe einer Funktion	47
2.1.2.1	Analytische Darstellung reeller Funktionen	47
2.1.2.2	Einige Funktionstypen	48
2.1.3	Monotone Funktionen	48
2.1.3.1	Beschränkte Funktionen	49
2.1.3.2	Gerade Funktionen	49
2.1.3.3	Ungerade Funktionen	49
2.1.3.4	Darstellung mit Hilfe gerader und ungerader Funktionen	49
2.1.3.5	Periodische Funktionen	49
2.1.3.6	Inverse oder Umkehrfunktionen	50
2.1.3.7	Grenzwert von Funktionen	50
2.1.4	Definition des Grenzwertes einer Funktion	50
2.1.4.1	Zurückführung auf den Grenzwert einer Folge (s. S. 398)	51
2.1.4.2	Konvergenzkriterium von CAUCHY	51
2.1.4.3	Unendlicher Grenzwert einer Funktion	51
2.1.4.4	Linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert einer Funktion	52
2.1.4.5	Grenzwert einer Funktion für $x$ gegen unendlich	52
2.1.4.6	Sätze über Grenzwerte von Funktionen	52
2.1.4.7	Berechnung von Grenzwerten	53
2.1.4.8	Größenordnung von Funktionen und LANDAU-Symbole	54
2.1.4.9	Stetigkeit einer Funktion	56
2.1.5	Begriff der Stetigkeit und Unstetigkeitsstelle	56
2.1.5.1	Definition der Stetigkeit	56
2.1.5.2	Häufig auftretende Arten von Unstetigkeiten	56
2.1.5.3	Stetigkeit und Unstetigkeitspunkte elementarer Funktionen	57
2.1.5.4		

	2.1.5.5	Eigenschaften stetiger Funktionen . . . . .	58
2.2		Elementare Funktionen . . . . .	59
	2.2.1	Algebraische Funktionen . . . . .	60
		2.2.1.1 Ganzrationale Funktionen (Polynome) . . . . .	60
		2.2.1.2 Gebrochenrationale Funktionen . . . . .	60
		2.2.1.3 Irrationale Funktionen . . . . .	60
	2.2.2	Transzendente Funktionen . . . . .	60
		2.2.2.1 Exponentialfunktionen . . . . .	60
		2.2.2.2 Logarithmische Funktionen . . . . .	60
		2.2.2.3 Trigonometrische Funktionen . . . . .	60
		2.2.2.4 Inverse trigonometrische Funktionen . . . . .	61
		2.2.2.5 Hyperbelfunktionen . . . . .	61
		2.2.2.6 Inverse Hyperbelfunktionen . . . . .	61
	2.2.3	Zusammengesetzte Funktionen . . . . .	61
2.3		Polynome . . . . .	61
	2.3.1	Lineare Funktion . . . . .	61
	2.3.2	Quadratisches Polynom . . . . .	61
	2.3.3	Polynom 3. Grades . . . . .	62
	2.3.4	Polynom $n$ -ten Grades . . . . .	62
	2.3.5	Parabel $n$ -ter Ordnung . . . . .	63
2.4		Gebrochenrationale Funktionen . . . . .	63
	2.4.1	Umgekehrte Proportionalität . . . . .	63
	2.4.2	Kurve 3. Ordnung, Typ I . . . . .	64
	2.4.3	Kurve 3. Ordnung, Typ II . . . . .	65
	2.4.4	Kurve 3. Ordnung, Typ III . . . . .	66
	2.4.5	Reziproke Potenz . . . . .	68
2.5		Irrationale Funktionen . . . . .	68
	2.5.1	Quadratwurzel aus einem linearen Binom . . . . .	68
	2.5.2	Potenzfunktion . . . . .	68
2.6		Exponentialfunktionen und logarithmische Funktionen . . . . .	70
	2.6.1	Exponentialfunktion . . . . .	70
	2.6.2	Logarithmische Funktionen . . . . .	70
	2.6.3	GAUSSsche Glockenkurve . . . . .	70
	2.6.4	Exponentialsumme . . . . .	71
	2.6.5	Verallgemeinerte Gaußsche Glockenkurve . . . . .	72
	2.6.6	Produkt aus Potenz- und Exponentialfunktion . . . . .	72
2.7		Trigonometrische Funktionen . . . . .	73
	2.7.1	Grundlagen . . . . .	73
		2.7.1.1 Definition und Darstellung . . . . .	73
		2.7.1.2 Wertebereiche und Funktionsverläufe . . . . .	76
	2.7.2	Wichtige Formeln für trigonometrische Funktionen . . . . .	77
		2.7.2.1 Funktionen eines Winkels . . . . .	77
		2.7.2.2 Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen gleichen Winkels . . . . .	78
		2.7.2.3 Trigonometrische Funktionen der Summe und der Differenz zweier Winkel . . . . .	78
		2.7.2.4 Trigonometrische Funktionen für Winkelvielfache . . . . .	78
		2.7.2.5 Trigonometrische Funktionen des halben Winkels . . . . .	79
		2.7.2.6 Summen und Differenzen zweier trigonometrischer Funktionen (Additionstheoreme) . . . . .	79
		2.7.2.7 Produkte trigonometrischer Funktionen . . . . .	79
		2.7.2.8 Potenzen trigonometrischer Funktionen . . . . .	80

2.7.3	Beschreibung von Schwingungen . . . . .	80
2.7.3.1	Problemstellung . . . . .	80
2.7.3.2	Superposition oder Überlagerung von Schwingungen . . . . .	81
2.7.3.3	Vektordiagramm für Schwingungen . . . . .	81
2.7.3.4	Dämpfung von Schwingungen . . . . .	82
2.8	Zyklometrische Funktionen (Arkusfunktionen) . . . . .	82
2.8.1	Definition der zyklometrischen Funktionen . . . . .	82
2.8.2	Zurückführung auf die Hauptwerte . . . . .	83
2.8.3	Beziehungen zwischen den Hauptwerten . . . . .	83
2.8.4	Formeln für negative Argumente . . . . .	84
2.8.5	Summe und Differenz von $\arcsin x$ und $\arcsin y$ . . . . .	84
2.8.6	Summe und Differenz von $\arccos x$ und $\arccos y$ . . . . .	85
2.8.7	Summe und Differenz von $\arctan x$ und $\arctan y$ . . . . .	85
2.8.8	Spezielle Beziehungen für $\arcsin x$ , $\arccos x$ , $\arctan x$ . . . . .	85
2.9	Hyperbelfunktionen . . . . .	86
2.9.1	Definition der Hyperbelfunktionen . . . . .	86
2.9.2	Graphische Darstellung der Hyperbelfunktionen . . . . .	86
2.9.2.1	Hyperbelsinus . . . . .	86
2.9.2.2	Hyperbelkosinus . . . . .	86
2.9.2.3	Hyperbeltangens . . . . .	87
2.9.2.4	Hyperbelkotangens . . . . .	87
2.9.3	Wichtige Formeln für Hyperbelfunktionen . . . . .	87
2.9.3.1	Hyperbelfunktionen einer Variablen . . . . .	88
2.9.3.2	Darstellung einer Hyperbelfunktion durch eine andere gleichen Argumentes . . . . .	88
2.9.3.3	Formeln für negative Argumente . . . . .	88
2.9.3.4	Hyperbelfunktionen der Summe und der Differenz zweier Argumente (Additionstheoreme) . . . . .	88
2.9.3.5	Hyperbelfunktionen des doppelten Arguments . . . . .	88
2.9.3.6	Formel von MOIVRE für Hyperbelfunktionen . . . . .	88
2.9.3.7	Hyperbelfunktionen des halben Arguments . . . . .	89
2.9.3.8	Summen und Differenzen von Hyperbelfunktionen . . . . .	89
2.9.3.9	Zusammenhang zwischen den Hyperbel- und den trigonometrischen Funktionen mit Hilfe komplexer Argumente $z$ . . . . .	89
2.10	Areafunktionen . . . . .	89
2.10.1	Definitionen . . . . .	89
2.10.1.1	Areasinus . . . . .	89
2.10.1.2	Areakosinus . . . . .	90
2.10.1.3	Areatangens . . . . .	90
2.10.1.4	Areakotangens . . . . .	90
2.10.2	Darstellung der Areafunktionen durch den natürlichen Logarithmus . . . . .	91
2.10.3	Beziehungen zwischen den verschiedenen Areafunktionen . . . . .	91
2.10.4	Summen und Differenzen von Areafunktionen . . . . .	92
2.10.5	Formeln für negative Argumente . . . . .	92
2.11	Kurven dritter Ordnung . . . . .	92
2.11.1	Semikubische Parabel . . . . .	92
2.11.2	Versiera der Agnesi . . . . .	93
2.11.3	Kartesisches Blatt . . . . .	93
2.11.4	Zissoide . . . . .	93
2.11.5	Strophoide . . . . .	94
2.12	Kurven vierter Ordnung . . . . .	94
2.12.1	Konchoide des Nikomedes . . . . .	94

2.12.2	Allgemeine Konchoide	95
2.12.3	Pascalsche Schnecke	95
2.12.4	Kardioide	96
2.12.5	Cassinische Kurven	97
2.12.6	Lemniskate	98
2.13	Zykloiden	98
2.13.1	Gewöhnliche Zykloide	98
2.13.2	Verlängerte und verkürzte Zykloiden oder Trochoiden	99
2.13.3	Epizykloide	100
2.13.4	Hypozykloide und Astroide	101
2.13.5	Verlängerte und verkürzte Epizykloide und Hypozykloide	102
2.14	Spiralen	102
2.14.1	Archimedische Spirale	102
2.14.2	Hyperbolische Spirale	103
2.14.3	Logarithmische Spirale	103
2.14.4	Evolvente des Kreises	104
2.14.5	Klotoide	104
2.15	Verschiedene andere Kurven	105
2.15.1	Kettenlinie oder Katenoide	105
2.15.2	Schleppkurve oder Traktrix	105
2.16	Aufstellung empirischer Kurven	106
2.16.1	Verfahrensweise	106
2.16.1.1	Kurvenbildervergleiche	106
2.16.1.2	Rektifizierung	106
2.16.1.3	Parameterbestimmung	106
2.16.2	Gebräuchlichste empirische Formeln	107
2.16.2.1	Potenzfunktionen	107
2.16.2.2	Exponentialfunktionen	107
2.16.2.3	Quadratisches Polynom	108
2.16.2.4	Gebrochenlineare Funktion	109
2.16.2.5	Quadratwurzel aus einem quadratischen Polynom	109
2.16.2.6	Verallgemeinerte Gaußsche Glockenkurve	109
2.16.2.7	Kurve 3. Ordnung, Typ II	110
2.16.2.8	Kurve 3. Ordnung, Typ III	110
2.16.2.9	Kurve 3. Ordnung, Typ I	110
2.16.2.10	Produkt aus Potenz- und Exponentialfunktion	111
2.16.2.11	Exponentialsumme	111
2.17	Skalen und Funktionspapiere	113
2.17.1	Skalen	113
2.17.2	Funktionspapiere	115
2.17.2.1	Einfach-logarithmisches Funktionspapier	115
2.17.2.2	Doppelt-logarithmisches Funktionspapier	115
2.17.2.3	Funktionspapier mit einer reziproken Skala	116
2.17.2.4	Hinweis	116
2.18	Funktionen von mehreren Veränderlichen	117
2.18.1	Definition und Darstellung	117
2.18.1.1	Darstellung von Funktionen mehrerer Veränderlicher	117
2.18.1.2	Geometrische Darstellung von Funktionen mehrerer Veränderlicher	117
2.18.2	Verschiedene ebene Definitionsbereiche	118
2.18.2.1	Definitionsbereich einer durch eine Menge gegebenen Funktion	118
2.18.2.2	Zweidimensionale Gebiete	118
2.18.2.3	Drei- und mehrdimensionale Gebiete	118

2.18.2.4	Methoden zur Definition einer Funktion . . . . .	118
2.18.2.5	Formen der analytischen Darstellung einer Funktion . . . . .	120
2.18.2.6	Abhängigkeit von Funktionen . . . . .	121
2.18.3	Grenzwerte . . . . .	122
2.18.3.1	Definition . . . . .	122
2.18.3.2	Exakte Formulierung . . . . .	123
2.18.3.3	Verallgemeinerung auf mehrere Veränderliche . . . . .	123
2.18.3.4	Iterierte Grenzwerte . . . . .	123
2.18.4	Stetigkeit . . . . .	123
2.18.5	Eigenschaften stetiger Funktionen . . . . .	123
2.18.5.1	Nullstellensatz von Bolzano . . . . .	123
2.18.5.2	Zwischenwertsatz . . . . .	124
2.18.5.3	Satz über die Beschränktheit einer Funktion . . . . .	124
2.18.5.4	Satz von Weierstrass über die Existenz des größten und kleinsten Funktionswertes . . . . .	124

**3 Geometrie . . . . . 125**

3.1	Planimetrie . . . . .	125
3.1.1	Grundbegriffe . . . . .	125
3.1.1.1	Punkt, Gerade, Strahl, Strecke . . . . .	125
3.1.1.2	Winkel . . . . .	125
3.1.1.3	Winkel an zwei sich schneidenden Geraden . . . . .	126
3.1.1.4	Winkelpaare an geschnittenen Parallelen . . . . .	126
3.1.1.5	Winkel im Gradmaß und im Bogenmaß . . . . .	127
3.1.2	Geometrische Definition der Kreis- und Hyperbel-Funktionen . . . . .	128
3.1.2.1	Definition der Kreis- oder trigonometrischen Funktionen . . . . .	128
3.1.2.2	Geometrische Definition der Hyperbelfunktionen . . . . .	128
3.1.3	Ebene Dreiecke . . . . .	129
3.1.3.1	Aussagen zu ebenen Dreiecken . . . . .	129
3.1.3.2	Symmetrie . . . . .	130
3.1.4	Ebene Vierecke . . . . .	131
3.1.4.1	Parallelogramm . . . . .	131
3.1.4.2	Rechteck und Quadrat . . . . .	132
3.1.4.3	Rhombus . . . . .	132
3.1.4.4	Trapez . . . . .	132
3.1.4.5	Allgemeines Viereck . . . . .	132
3.1.5	Ebene Vielecke . . . . .	133
3.1.6	Ebene Kreisfiguren . . . . .	134
3.1.6.1	Kreis . . . . .	134
3.1.6.2	Kreisabschnitt (Kreissegment) und Kreisabschnitt (Kreissektor) . . . . .	135
3.1.6.3	Kreisring . . . . .	135
3.2	Ebene Trigonometrie . . . . .	136
3.2.1	Dreiecksberechnungen . . . . .	136
3.2.1.1	Berechnungen in rechtwinkligen ebenen Dreiecken . . . . .	136
3.2.1.2	Berechnungen in schiefwinkligen ebenen Dreiecken . . . . .	136
3.2.2	Geodätische Anwendungen . . . . .	139
3.2.2.1	Geodätische Koordinaten . . . . .	139
3.2.2.2	Winkel in der Geodäsie . . . . .	140
3.2.2.3	Vermessungstechnische Anwendungen . . . . .	142
3.3	Stereometrie . . . . .	145
3.3.1	Geraden und Ebenen im Raum . . . . .	145
3.3.2	Kanten, Ecken, Raumwinkel . . . . .	146



	3.3.3	Polyeder . . . . .	147
	3.3.4	Körper, die durch gekrümmte Flächen begrenzt sind . . . . .	150
3.4		Sphärische Trigonometrie . . . . .	154
	3.4.1	Grundbegriffe der Geometrie auf der Kugel . . . . .	154
	3.4.1.1	Kurven, Bogen und Winkel auf der Kugel . . . . .	154
	3.4.1.2	Spezielle Koordinatensysteme . . . . .	156
	3.4.1.3	Sphärisches Zweieck . . . . .	157
	3.4.1.4	Sphärisches Dreieck . . . . .	158
	3.4.1.5	Polardreieck . . . . .	158
	3.4.1.6	Eulersche und Nicht-Eulersche Dreiecke . . . . .	158
	3.4.1.7	Dreikant . . . . .	159
	3.4.2	Haupteigenschaften sphärischer Dreiecke . . . . .	159
	3.4.2.1	Allgemeine Aussagen . . . . .	159
	3.4.2.2	Grundformeln und Anwendungen . . . . .	160
	3.4.2.3	Weitere Formeln . . . . .	163
	3.4.3	Berechnung sphärischer Dreiecke . . . . .	164
	3.4.3.1	Grundaufgaben, Genauigkeitsbetrachtungen . . . . .	164
	3.4.3.2	Rechtwinklig sphärisches Dreieck . . . . .	164
	3.4.3.3	Schiefwinklig sphärisches Dreieck . . . . .	166
	3.4.3.4	Sphärische Kurven . . . . .	170
3.5		Vektoralgebra und analytische Geometrie . . . . .	176
	3.5.1	Vektoralgebra . . . . .	176
	3.5.1.1	Definition des Vektors, Rechenregeln . . . . .	176
	3.5.1.2	Skalarprodukt und Vektorprodukt . . . . .	179
	3.5.1.3	Mehrfache multiplikative Verknüpfungen . . . . .	181
	3.5.1.4	Vektorielle Gleichungen . . . . .	183
	3.5.1.5	Kovariante und kontravariante Koordinaten eines Vektors . . . . .	184
	3.5.1.6	Geometrische Anwendungen der Vektoralgebra . . . . .	185
	3.5.2	Analytische Geometrie der Ebene . . . . .	186
	3.5.2.1	Grundlegende Begriffe und Formeln, ebene Koordinatensysteme . . . . .	186
	3.5.2.2	Gerade . . . . .	190
	3.5.2.3	Kreis . . . . .	193
	3.5.2.4	Ellipse . . . . .	194
	3.5.2.5	Hyperbel . . . . .	196
	3.5.2.6	Parabel . . . . .	199
	3.5.2.7	Kurven zweiter Ordnung (Kegelschnitte) . . . . .	201
	3.5.3	Analytische Geometrie des Raumes . . . . .	204
	3.5.3.1	Grundlagen, räumliche Koordinatensysteme . . . . .	204
	3.5.3.2	Gerade und Ebene im Raum . . . . .	211
	3.5.3.3	Flächen zweiter Ordnung, Gleichungen in Normalform . . . . .	217
	3.5.3.4	Flächen zweiter Ordnung, allgemeine Theorie . . . . .	221
3.6		Differentialgeometrie . . . . .	223
	3.6.1	Ebene Kurven . . . . .	223
	3.6.1.1	Möglichkeiten, eine ebene Kurve zu definieren . . . . .	223
	3.6.1.2	Lokale Elemente einer Kurve . . . . .	224
	3.6.1.3	Ausgezeichnete Kurvenpunkte und Asymptoten . . . . .	229
	3.6.1.4	Allgemeine Untersuchung einer Kurve nach ihrer Gleichung . . . . .	234
	3.6.1.5	Evoluten und Evolventen . . . . .	235
	3.6.1.6	Einhüllende von Kurvenscharen . . . . .	236
	3.6.2	Raumkurven . . . . .	237
	3.6.2.1	Möglichkeiten, eine Raumkurve zu definieren . . . . .	237
	3.6.2.2	Begleitendes Dreibein . . . . .	237

3.6.2.3	Krümmung und Windung . . . . .	240
3.6.3	Flächen . . . . .	242
3.6.3.1	Möglichkeiten, eine Fläche zu definieren . . . . .	242
3.6.3.2	Tangentialebene und Flächennormale . . . . .	243
3.6.3.3	Linielement auf einer Fläche . . . . .	244
3.6.3.4	Krümmung einer Fläche . . . . .	246
3.6.3.5	Regelflächen und abwickelbare Flächen . . . . .	248
3.6.3.6	Geodätische Linien auf einer Fläche . . . . .	249
<b>4</b>	<b>Lineare Algebra</b> . . . . .	<b>250</b>
4.1	Matrizen . . . . .	250
4.1.1	Begriff der Matrix . . . . .	250
4.1.2	Quadratische Matrizen . . . . .	251
4.1.3	Vektoren . . . . .	252
4.1.4	Rechenoperationen mit Matrizen . . . . .	253
4.1.5	Rechenregeln für Matrizen . . . . .	256
4.1.6	Vektor- und Matrizennorm . . . . .	257
4.1.6.1	Vektornormen . . . . .	257
4.1.6.2	Matrizennormen . . . . .	258
4.2	Determinanten . . . . .	258
4.2.1	Definitionen . . . . .	258
4.2.1.1	Determinanten . . . . .	258
4.2.1.2	Unterdeterminanten . . . . .	258
4.2.2	Rechenregeln für Determinanten . . . . .	259
4.2.3	Berechnung von Determinanten . . . . .	260
4.3	Tensoren . . . . .	261
4.3.1	Transformation des Koordinatensystems . . . . .	261
4.3.2	Tensoren in kartesischen Koordinaten . . . . .	261
4.3.3	Tensoren mit speziellen Eigenschaften . . . . .	263
4.3.3.1	Tensoren 2. Stufe . . . . .	263
4.3.3.2	Invariante Tensoren . . . . .	264
4.3.4	Tensoren in krummlinigen Koordinatensystemen . . . . .	265
4.3.4.1	Kovariante und kontravariante Basisvektoren . . . . .	265
4.3.4.2	Kovariante und kontravariante Koordinaten von Tensoren 1. Stufe . . . . .	265
4.3.4.3	Kovariante, kontravariante und gemischte Koordinaten von Tensoren 2. Stufe . . . . .	266
4.3.4.4	Rechenregeln . . . . .	267
4.3.5	Pseudotensoren . . . . .	268
4.3.5.1	Punktspiegelung am Koordinatenursprung . . . . .	268
4.3.5.2	Einführung des Begriffs Pseudotensors . . . . .	269
4.4	Lineare Gleichungssysteme . . . . .	270
4.4.1	Lineare Systeme, Austauschverfahren . . . . .	270
4.4.1.1	Lineare Systeme . . . . .	270
4.4.1.2	Austauschverfahren . . . . .	270
4.4.1.3	Lineare Abhängigkeiten . . . . .	271
4.4.1.4	Invertierung einer Matrix . . . . .	271
4.4.2	Lösung linearer Gleichungssysteme . . . . .	271
4.4.2.1	Definition und Lösbarkeit . . . . .	271
4.4.2.2	Anwendung des Austauschverfahrens . . . . .	273
4.4.2.3	Cramersche Regel . . . . .	274
4.4.2.4	Gaußscher Algorithmus . . . . .	275
4.4.3	Überbestimmte lineare Gleichungssysteme . . . . .	276

	4.4.3.1	Überbestimmte lineare Gleichungssysteme und lineare Quadratmittelprobleme . . . . .	276
	4.4.3.2	Hinweise zur numerischen Lösung linearer Quadratmittelprobleme . . . . .	277
4.5		Eigenwertaufgaben bei Matrizen . . . . .	278
	4.5.1	Allgemeines Eigenwertproblem . . . . .	278
	4.5.2	Spezielles Eigenwertproblem . . . . .	278
	4.5.2.1	Charakteristisches Polynom . . . . .	278
	4.5.2.2	Reelle symmetrische Matrizen, Ähnlichkeitstransformationen . . . . .	279
	4.5.2.3	Hauptachsentransformation quadratischer Formen . . . . .	280
	4.5.2.4	Hinweise zur numerischen Bestimmung von Eigenwerten . . . . .	281
	4.5.3	Singulärwertzerlegung . . . . .	281
<b>5</b>		<b>Algebra und Diskrete Mathematik</b>	<b>283</b>
5.1		Logik . . . . .	283
	5.1.1	Aussagenlogik . . . . .	283
	5.1.2	Ausdrücke der Prädikatenlogik . . . . .	286
5.2		Mengenlehre . . . . .	288
	5.2.1	Mengenbegriff, spezielle Mengen . . . . .	288
	5.2.2	Operationen mit Mengen . . . . .	289
	5.2.3	Relationen und Abbildungen . . . . .	292
	5.2.4	Äquivalenz- und Ordnungsrelationen . . . . .	294
	5.2.5	Mächtigkeit von Mengen . . . . .	295
5.3		Klassische algebraische Strukturen . . . . .	297
	5.3.1	Operationen . . . . .	297
	5.3.2	Halbgruppen . . . . .	297
	5.3.3	Gruppen . . . . .	297
	5.3.3.1	Definition und grundlegende Eigenschaften . . . . .	297
	5.3.3.2	Untergruppen und direkte Produkte . . . . .	299
	5.3.3.3	Abbildungen zwischen Gruppen . . . . .	300
	5.3.4	Anwendungen von Gruppen . . . . .	301
	5.3.4.1	Symmetrieoperationen, Symmetrieelemente . . . . .	301
	5.3.4.2	Symmetriegruppen . . . . .	302
	5.3.4.3	Moleküle . . . . .	302
	5.3.5	Ringe und Körper . . . . .	304
	5.3.5.1	Definitionen . . . . .	304
	5.3.5.2	Unterringe, Ideale . . . . .	305
	5.3.5.3	Homomorphismen, Isomorphismen, Homomorphiesatz . . . . .	305
	5.3.6	Vektorräume * . . . . .	306
	5.3.6.1	Definition . . . . .	306
	5.3.6.2	Lineare Abhängigkeit . . . . .	306
	5.3.6.3	Lineare Abbildungen . . . . .	307
	5.3.6.4	Unterräume, Dimensionsformel . . . . .	307
	5.3.6.5	Euklidische Vektorräume, Euklidische Norm . . . . .	307
5.4		Elementare Zahlentheorie . . . . .	309
	5.4.1	Teilbarkeit . . . . .	309
	5.4.1.1	Teilbarkeit und elementare Teilbarkeitsregeln . . . . .	309
	5.4.1.2	Primzahlen . . . . .	309
	5.4.1.3	Teilbarkeitskriterien . . . . .	311
	5.4.1.4	Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches . . . . .	312
	5.4.1.5	FIBONACCI-Zahlen . . . . .	313
	5.4.2	Lineare Diophantische Gleichungen . . . . .	314
	5.4.3	Kongruenzen und Restklassen . . . . .	315

	5.4.4	Sätze von Fermat, Euler und Wilson . . . . .	319
	5.4.5	Codes . . . . .	320
5.5		Kryptologie . . . . .	322
	5.5.1	Aufgabe der Kryptologie . . . . .	322
	5.5.2	Kryptosysteme . . . . .	323
	5.5.3	Mathematische Präzisierung . . . . .	323
	5.5.4	Sicherheit von Kryptosystemen . . . . .	324
	5.5.4.1	Methoden der klassischen Kryptologie . . . . .	324
	5.5.4.2	Tauschchiffren . . . . .	324
	5.5.4.3	VIGENERE-Chiffre . . . . .	325
	5.5.4.4	Matrixsubstitutionen . . . . .	325
	5.5.5	Methoden der klassischen Kryptoanalyse . . . . .	325
	5.5.5.1	Statistische Analyse . . . . .	326
	5.5.5.2	KASISKI-FRIEDMAN-Test . . . . .	326
	5.5.6	One-Time-Tape . . . . .	327
	5.5.7	Verfahren mit öffentlichem Schlüssel . . . . .	327
	5.5.7.1	Konzept von DIFFIE und HELLMAN . . . . .	327
	5.5.7.2	Einwegfunktionen . . . . .	328
	5.5.7.3	RSA-Verfahren . . . . .	328
	5.5.8	DES-Algorithmus (Data Encryption Standard) . . . . .	328
	5.5.9	IDEA-Algorithmus (International Data Encryption Algorithm) . . . . .	329
5.6		Universelle Algebra . . . . .	330
	5.6.1	Definition . . . . .	330
	5.6.2	Kongruenzrelationen, Faktoralgebren . . . . .	330
	5.6.3	Homomorphismen . . . . .	330
	5.6.4	Homomorphiesatz . . . . .	331
	5.6.5	Varietäten . . . . .	331
	5.6.6	Termalgebren, freie Algebren . . . . .	331
5.7		Boolesche Algebren und Schaltalgebra . . . . .	332
	5.7.1	Definition . . . . .	332
	5.7.2	Dualitätsprinzip . . . . .	332
	5.7.3	Endliche BOOLEsche Algebren . . . . .	333
	5.7.4	BOOLEsche Algebren als Ordnungen . . . . .	333
	5.7.5	BOOLEsche Funktionen, BOOLEsche Ausdrücke . . . . .	333
	5.7.6	Normalformen . . . . .	335
	5.7.7	Schaltalgebra . . . . .	335
5.8		Algorithmen der Graphentheorie . . . . .	338
	5.8.1	Grundbegriffe und Bezeichnungen . . . . .	338
	5.8.2	Durchlaufungen von ungerichteten Graphen . . . . .	341
	5.8.2.1	Kantenfolgen . . . . .	341
	5.8.2.2	Eulersche Linien . . . . .	342
	5.8.2.3	Hamilton-Kreise . . . . .	343
	5.8.3	Bäume und Gerüste . . . . .	344
	5.8.3.1	Bäume . . . . .	344
	5.8.3.2	Gerüste . . . . .	345
	5.8.4	Matchings . . . . .	346
	5.8.5	Planare Graphen . . . . .	347
	5.8.6	Bahnen in gerichteten Graphen . . . . .	348
	5.8.7	Transportnetze . . . . .	349
5.9		Fuzzy-Logik . . . . .	351
	5.9.1	Grundlagen der Fuzzy-Logik . . . . .	351
	5.9.1.1	Interpretation von Fuzzy-Mengen (Unscharfe Mengen) . . . . .	351

	5.9.1.2	Zugehörigkeitsfunktionen . . . . .	352
	5.9.1.3	Fuzzy-Mengen . . . . .	354
5.9.2		Verknüpfungen unscharfer Mengen . . . . .	355
	5.9.2.1	Konzept für eine Verknüpfung (Aggregation) unscharfer Mengen . . . . .	355
	5.9.2.2	Praktische Verknüpfungen unscharfer Mengen . . . . .	356
	5.9.2.3	Kompensatorische Operatoren . . . . .	359
	5.9.2.4	Erweiterungsprinzip . . . . .	359
	5.9.2.5	Unschärfe Komplementfunktion . . . . .	359
5.9.3		Fuzzy-wertige Relationen . . . . .	360
	5.9.3.1	Fuzzy-Relationen . . . . .	360
	5.9.3.2	Fuzzy-Relationenprodukt $R \circ S$ . . . . .	362
5.9.4		Fuzzy-Inferenz . . . . .	363
5.9.5		Defuzzifizierungsmethoden . . . . .	365
5.9.6		Wissensbasierte Fuzzy-Systeme . . . . .	366
	5.9.6.1	Methode MAMDANI . . . . .	366
	5.9.6.2	Methode SUGENO . . . . .	366
	5.9.6.3	Kognitive Systeme . . . . .	367
	5.9.6.4	Wissensbasiertes Interpolationssystem . . . . .	369
<b>6</b>		<b>Differentialrechnung</b>	<b>372</b>
6.1		Differentiation von Funktionen einer Veränderlichen . . . . .	372
	6.1.1	Differentialquotient . . . . .	372
	6.1.2	Differentiationsregeln für Funktionen einer Veränderlicher . . . . .	373
	6.1.2.1	Ableitungen elementarer Funktionen . . . . .	373
	6.1.2.2	Grundregeln für das Differenzieren . . . . .	373
	6.1.3	Ableitungen höherer Ordnung . . . . .	379
	6.1.3.1	Definition der Ableitungen höherer Ordnung . . . . .	379
	6.1.3.2	Ableitungen höherer Ordnung der einfachsten Funktionen . . . . .	379
	6.1.3.3	Leibnizsche Regel . . . . .	379
	6.1.3.4	Höhere Ableitungen von Funktionen in Parameterdarstellung . . . . .	380
	6.1.3.5	Ableitungen höherer Ordnung der inversen Funktion . . . . .	380
	6.1.4	Hauptsätze der Differentialrechnung . . . . .	381
	6.1.4.1	Monotoniebedingungen . . . . .	381
	6.1.4.2	Satz von FERMAT . . . . .	381
	6.1.4.3	Satz von ROLLE . . . . .	382
	6.1.4.4	Mittelwertsatz der Differentialrechnung . . . . .	382
	6.1.4.5	Satz von TAYLOR für Funktionen von einer Veränderlichen . . . . .	383
	6.1.4.6	Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung . . . . .	383
	6.1.5	Bestimmung von Extremwerten und Wendepunkten . . . . .	383
	6.1.5.1	Maxima und Minima . . . . .	383
	6.1.5.2	Notwendige Bedingung für die Existenz eines relativen Extremwertes . . . . .	384
	6.1.5.3	Relative Extremwerte einer differenzierbaren, explizit gegebenen Funktion $y = f(x)$ . . . . .	384
	6.1.5.4	Bestimmung der globalen Extremwerte . . . . .	385
	6.1.5.5	Bestimmung der Extremwerte einer implizit gegebenen Funktion . . . . .	385
6.2		Differentiation von Funktionen von mehreren Veränderlichen . . . . .	386
	6.2.1	Partielle Ableitungen . . . . .	386
	6.2.1.1	Partielle Ableitung einer Funktion . . . . .	386
	6.2.1.2	Geometrische Bedeutung bei zwei Veränderlichen . . . . .	386
	6.2.1.3	Begriff des Differentials . . . . .	386
	6.2.1.4	Haupteigenschaften des Differentials . . . . .	387
	6.2.1.5	Partielles Differential . . . . .	387

6.2.2	Vollständiges Differential und Differentiale höherer Ordnung . . . . .	388
6.2.2.1	Begriff des vollständigen Differentials einer Funktion von mehreren Veränderlichen (totales Differential) . . . . .	388
6.2.2.2	Ableitungen und Differentiale höherer Ordnungen . . . . .	389
6.2.3	Differentiationsregeln für Funktionen von mehreren Veränderlichen . . . . .	390
6.2.3.1	Differentiation von zusammengesetzten Funktionen . . . . .	390
6.2.3.2	Differentiation impliziter Funktionen . . . . .	390
6.2.4	Substitution von Variablen in Differentialausdrücken und Koordinatentransformationen . . . . .	391
6.2.4.1	Funktion von einer Veränderlichen . . . . .	391
6.2.4.2	Funktion zweier Veränderlicher . . . . .	393
6.2.5	Extremwerte von Funktionen von mehreren Veränderlichen . . . . .	394
6.2.5.1	Definition . . . . .	394
6.2.5.2	Geometrische Bedeutung . . . . .	394
6.2.5.3	Bestimmung der Extremwerte einer Funktion von zwei Veränderlichen . . . . .	395
6.2.5.4	Bestimmung der Extremwerte einer Funktion von $n$ Veränderlichen . . . . .	395
6.2.5.5	Lösung von Approximationsaufgaben . . . . .	395
6.2.5.6	Bestimmung der Extremwerte unter Vorgabe von Nebenbedingungen . . . . .	395
<b>7</b>	<b>Unendliche Reihen</b> . . . . .	<b>397</b>
7.1	Zahlenfolgen . . . . .	397
7.1.1	Eigenschaften von Zahlenfolgen . . . . .	397
7.1.1.1	Definition der Zahlenfolge . . . . .	397
7.1.1.2	Monotone Zahlenfolgen . . . . .	397
7.1.1.3	Beschränkte Folgen . . . . .	397
7.1.2	Grenzwerte von Zahlenfolgen . . . . .	398
7.2	Reihen mit konstanten Gliedern . . . . .	399
7.2.1	Allgemeine Konvergenzsätze . . . . .	399
7.2.1.1	Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen . . . . .	399
7.2.1.2	Allgemeine Sätze über die Konvergenz von Reihen . . . . .	399
7.2.2	Konvergenzkriterien für Reihen mit positiven Gliedern . . . . .	400
7.2.2.1	Vergleichskriterium . . . . .	400
7.2.2.2	Quotientenkriterium von d'Alembert . . . . .	400
7.2.2.3	Wurzelkriterium von Cauchy . . . . .	401
7.2.2.4	Integralkriterium von Cauchy . . . . .	401
7.2.3	Absolute und bedingte Konvergenz . . . . .	402
7.2.3.1	Definition . . . . .	402
7.2.3.2	Eigenschaften absolut konvergenter Reihen . . . . .	402
7.2.3.3	Alternierende Reihen . . . . .	403
7.2.4	Einige spezielle Reihen . . . . .	403
7.2.4.1	Summenwerte einiger Reihen mit konstanten Gliedern . . . . .	403
7.2.4.2	Bernoullische und Eulersche Zahlen . . . . .	404
7.2.5	Abschätzung des Reihenrestes . . . . .	406
7.2.5.1	Abschätzung mittels Majorante . . . . .	406
7.2.5.2	Alternierende konvergente Reihen . . . . .	406
7.2.5.3	Spezielle Reihen . . . . .	407
7.3	Funktionsreihen . . . . .	407
7.3.1	Definitionen . . . . .	407
7.3.2	Gleichmäßige Konvergenz . . . . .	407
7.3.2.1	Definition, Satz von Weierstraß . . . . .	407
7.3.2.2	Eigenschaften gleichmäßig konvergenter Reihen . . . . .	408
7.3.3	Potenzreihen . . . . .	409

	7.3.3.1	Definition, Konvergenz . . . . .	409
	7.3.3.2	Rechnen mit Potenzreihen . . . . .	409
	7.3.3.3	Entwicklung in Taylor-Reihen, MacLaurinsche Reihe . . . . .	410
	7.3.4	Näherungsformeln . . . . .	412
	7.3.5	Asymptotische Potenzreihen . . . . .	413
	7.3.5.1	Asymptotische Gleichheit . . . . .	413
	7.3.5.2	Asymptotische Potenzreihen . . . . .	414
7.4		Fourier-Reihen . . . . .	415
	7.4.1	Trigonometrische Summe und Fourier-Reihe . . . . .	415
	7.4.1.1	Grundbegriffe . . . . .	415
	7.4.1.2	Wichtigste Eigenschaften von Fourier-Reihen . . . . .	416
	7.4.2	Koeffizientenbestimmung für symmetrische Funktionen . . . . .	417
	7.4.2.1	Symmetrien verschiedener Art . . . . .	417
	7.4.2.2	Formen der Entwicklung in eine FOURIER-Reihe . . . . .	418
	7.4.3	Koeffizientenbestimmung mit Hilfe numerischer Methoden . . . . .	418
	7.4.4	Fourier-Reihe und Fourier-Integral . . . . .	419
	7.4.5	Hinweise zur Tabelle einiger Fourier-Entwicklungen . . . . .	420
<b>8</b>		<b>Integralrechnung</b> . . . . .	<b>421</b>
8.1		Unbestimmtes Integral . . . . .	421
	8.1.1	Stammfunktion oder Integral . . . . .	421
	8.1.1.1	Unbestimmte Integrale . . . . .	422
	8.1.1.2	Integrale elementarer Funktionen . . . . .	422
	8.1.2	Integrationsregeln . . . . .	422
	8.1.3	Integration rationaler Funktionen . . . . .	425
	8.1.3.1	Integrale ganzrationaler Funktionen (Polynome) . . . . .	425
	8.1.3.2	Integrale gebrochenrationaler Funktionen . . . . .	426
	8.1.3.3	Vier Fälle bei der Partialbruchzerlegung . . . . .	426
	8.1.4	Integration irrationaler Funktionen . . . . .	428
	8.1.4.1	Substitution zur Rückführung auf Integrale rationaler Funktionen . . . . .	428
	8.1.4.2	Rückführung auf Integrale rationaler Ausdrücke mit trigonometrischen und Hyperbelfunktionen . . . . .	429
	8.1.4.3	Integration binomischer Integranden . . . . .	430
	8.1.4.4	Elliptische Integrale . . . . .	430
	8.1.5	Integration trigonometrischer Funktionen . . . . .	431
	8.1.5.1	Substitution . . . . .	431
	8.1.5.2	Vereinfachte Methoden . . . . .	432
	8.1.6	Integration weiterer transzendenter Funktionen . . . . .	433
	8.1.6.1	Integrale mit Exponentialfunktionen . . . . .	433
	8.1.6.2	Integrale mit Hyperbelfunktionen . . . . .	433
	8.1.6.3	Anwendung der partiellen Integration . . . . .	434
	8.1.6.4	Integrale transzendenter Funktionen . . . . .	434
8.2		Bestimmte Integrale . . . . .	434
	8.2.1	Grundbegriffe, Regeln und Sätze . . . . .	434
	8.2.1.1	Definition und Existenz des bestimmten Integrals . . . . .	434
	8.2.1.2	Eigenschaften bestimmter Integrale . . . . .	435
	8.2.1.3	Weitere Sätze über Integrationsgrenzen . . . . .	437
	8.2.1.4	Berechnung bestimmter Integrale . . . . .	439
	8.2.2	Anwendungen bestimmter Integrale . . . . .	441
	8.2.2.1	Allgemeines Prinzip zur Anwendung des bestimmten Integrals . . . . .	441
	8.2.2.2	Anwendungen in der Geometrie . . . . .	442
	8.2.2.3	Anwendungen in Mechanik und Physik . . . . .	445

8.2.3	Uneigentliche Integrale, Stieltjes- und Lebesgue-Integrale . . . . .	447
8.2.3.1	Verallgemeinerungen des Integralbegriffs . . . . .	447
8.2.3.2	Integrale mit unendlichen Integrationsgrenzen . . . . .	448
8.2.3.3	Integrale mit unbeschränktem Integranden . . . . .	451
8.2.4	Parameterintegrale . . . . .	453
8.2.4.1	Definition des Parameterintegrals . . . . .	453
8.2.4.2	Differentiation unter dem Integralzeichen . . . . .	453
8.2.4.3	Integration unter dem Integralzeichen . . . . .	454
8.2.5	Integration durch Reihenentwicklung, spezielle nichtelementare Funktionen . . . . .	454
8.3	Kurvenintegrale . . . . .	457
8.3.1	Kurvenintegrale erster Art . . . . .	457
8.3.1.1	Definitionen . . . . .	457
8.3.1.2	Existenzsatz . . . . .	458
8.3.1.3	Berechnung des Kurvenintegrals erster Art . . . . .	458
8.3.1.4	Anwendungen des Kurvenintegrals erster Art . . . . .	459
8.3.2	Kurvenintegrale zweiter Art . . . . .	460
8.3.3	Kurvenintegral allgemeiner Art . . . . .	461
8.3.4	Unabhängigkeit des Kurvenintegrals vom Integrationsweg . . . . .	463
8.4	Mehrfachintegrale . . . . .	465
8.4.1	Doppelintegral . . . . .	466
8.4.1.1	Begriff des Doppelintegrals . . . . .	466
8.4.1.2	Berechnung des Doppelintegrals . . . . .	467
8.4.1.3	Anwendungen von Doppelintegralen . . . . .	469
8.4.2	Dreifachintegral . . . . .	471
8.4.2.1	Begriff des Dreifachintegrals . . . . .	471
8.4.2.2	Berechnung des Dreifachintegrals . . . . .	471
8.4.2.3	Anwendungen von Dreifachintegralen . . . . .	474
8.5	Oberflächenintegrale . . . . .	474
8.5.1	Oberflächenintegrale erster Art . . . . .	474
8.5.1.1	Begriff des Oberflächenintegrals erster Art . . . . .	474
8.5.1.2	Berechnung des Oberflächenintegrals erster Art . . . . .	476
8.5.1.3	Anwendungen des Oberflächenintegrals erster Art . . . . .	478
8.5.2	Oberflächenintegrale zweiter Art . . . . .	478
8.5.2.1	Begriff des Oberflächenintegrals zweiter Art . . . . .	478
8.5.2.2	Berechnung des Oberflächenintegrals zweiter Art . . . . .	479
8.5.2.3	Eine Anwendung des Oberflächenintegrals . . . . .	481
<b>9</b>	<b>Differentialgleichungen</b> . . . . .	<b>482</b>
9.1	Gewöhnliche Differentialgleichungen . . . . .	482
9.1.1	Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . . .	482
9.1.1.1	Existenzsatz, Richtungsfeld . . . . .	482
9.1.1.2	Wichtige Integrationsmethoden . . . . .	483
9.1.1.3	Implizite Differentialgleichungen . . . . .	487
9.1.1.4	Singuläre Integrale und singuläre Punkte . . . . .	488
9.1.1.5	Näherungsmethoden zur Integration von Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . . .	491
9.1.2	Differentialgleichungen höherer Ordnung und Systeme von Differentialgleichungen . . . . .	493
9.1.2.1	Grundlegende Betrachtungen . . . . .	493
9.1.2.2	Erniedrigung der Ordnung . . . . .	494
9.1.2.3	Lineare Differentialgleichungen $n$ -ter Ordnung . . . . .	496
9.1.2.4	Lösung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	498



	9.1.2.5	Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	500
	9.1.2.6	Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung	503
9.1.3		Randwertprobleme	510
	9.1.3.1	Problemstellung	510
	9.1.3.2	Haupteigenschaften der Eigenfunktionen und Eigenwerte	511
	9.1.3.3	Entwicklung nach Eigenfunktionen	511
9.2		Partielle Differentialgleichungen	513
	9.2.1	Partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung	513
	9.2.1.1	Lineare partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung	513
	9.2.1.2	Nichtlineare partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung	515
	9.2.2	Lineare partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung	518
	9.2.2.1	Klassifikation und Eigenschaften der Differentialgleichungen 2. Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen	518
	9.2.2.2	Klassifikation und Eigenschaften der Differentialgleichungen 2. Ordnung mit mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen	520
	9.2.2.3	Integrationsmethoden für lineare partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung	521
	9.2.3	Partielle Differentialgleichungen aus Naturwissenschaft und Technik	532
	9.2.3.1	Problemstellungen und Randbedingungen	532
	9.2.3.2	Wellengleichung	533
	9.2.3.3	Wärmeleitungs- und Diffusionsgleichung für ein homogenes Medium	534
	9.2.3.4	Potentialgleichung	535
	9.2.3.5	Schrödinger-Gleichung	535
	9.2.4	Nichtlineare partielle Differentialgleichungen, Solitonen	544
	9.2.4.1	Physikalisch-mathematische Problemstellung	544
	9.2.4.2	KÖRTEWEG-DE-VRIES-Gleichung	545
	9.2.4.3	Nichtlineare SCHRÖDINGER-Gleichung	546
	9.2.4.4	SINUS-GORDON-Gleichung	547
	9.2.4.5	Weitere nichtlineare Evolutionsgleichungen mit Solitonlösungen	548
<b>10</b>		<b>Variationsrechnung</b>	<b>550</b>
10.1		Aufgabenstellung	550
10.2		Historische Aufgaben	551
	10.2.1	Isoperimetrisches Problem	551
	10.2.2	Brachistochronenproblem	551
10.3		Variationsaufgaben mit Funktionen einer Veränderlichen	552
	10.3.1	Einfache Variationsaufgabe und Extremale	552
	10.3.2	Eulersche Differentialgleichung der Variationsrechnung	552
	10.3.3	Variationsaufgaben mit Nebenbedingungen	554
	10.3.4	Variationsaufgaben mit höheren Ableitungen	554
	10.3.5	Variationsaufgaben mit mehreren gesuchten Funktionen	555
	10.3.6	Variationsaufgaben in Parameterdarstellung	556
10.4		Variationsaufgaben mit Funktionen von mehreren Veränderlichen	557
	10.4.1	Einfache Variationsaufgabe	557
	10.4.2	Allgemeinere Variationsaufgaben	558
10.5		Numerische Lösung von Variationsaufgaben	558
10.6		Ergänzungen	560
	10.6.1	Erste und zweite Variation	560
	10.6.2	Anwendungen in der Physik	560

<b>11</b>	<b>Lineare Integralgleichungen</b>	<b>561</b>
11.1	Einführung und Klassifikation	561
11.2	Fredholmsche Integralgleichungen 2. Art	562
11.2.1	Integralgleichungen mit ausgearteten Kernen	562
11.2.2	Methode der sukzessiven Approximation, Neumann-Reihe	565
11.2.3	Fredholmsche Lösungsmethode, Fredholmsche Sätze	567
11.2.3.1	Fredholmsche Lösungsmethode	567
11.2.3.2	Fredholmsche Sätze	569
11.2.4	Numerische Verfahren für Fredholmsche Integralgleichungen 2. Art	570
11.2.4.1	Approximation des Integrals	570
11.2.4.2	Kernapproximation	572
11.2.4.3	Kollokationsmethode	574
11.3	Fredholmsche Integralgleichungen 1. Art	576
11.3.1	Integralgleichungen mit ausgearteten Kernen	576
11.3.2	Begriffe, analytische Grundlagen	577
11.3.3	Zurückführung der Integralgleichung auf ein lineares Gleichungssystem	578
11.3.4	Lösung der homogenen Integralgleichung 1. Art	580
11.3.5	Konstruktion zweier spezieller Orthonormalsysteme zu einem gegebenen Kern	581
11.3.6	Iteratives Verfahren	582
11.4	Voltterrasche Integralgleichungen	583
11.4.1	Theoretische Grundlagen	583
11.4.2	Lösung durch Differentiation	584
11.4.3	Neumannsche Reihe zur Lösung der Voltterraschen Integralgleichungen 2. Art	585
11.4.4	Voltterrasche Integralgleichungen vom Faltungstyp	586
11.4.5	Numerische Behandlung Voltterrascher Integralgleichungen 2. Art	586
11.5	Singuläre Integralgleichungen	588
11.5.1	Abelsche Integralgleichung	588
11.5.2	Singuläre Integralgleichungen mit Cauchy-Kernen	590
11.5.2.1	Formulierung der Aufgabe	590
11.5.2.2	Existenz einer Lösung	590
11.5.2.3	Eigenschaften des Cauchy-Integrals	590
11.5.2.4	Hilbertsches Randwertproblem	591
11.5.2.5	Lösung des Hilbertschen Randwertproblems	591
11.5.2.6	Lösung der charakteristischen Integralgleichung	592
<b>12</b>	<b>Funktionalanalysis</b>	<b>594</b>
12.1	Vektorräume	594
12.1.1	Begriff des Vektorraumes	594
12.1.2	Lineare und affin-lineare Teilmengen	595
12.1.3	Linear unabhängige Elemente	597
12.1.4	Konvexe Teilmengen und konvexe Hülle	597
12.1.4.1	Konvexe Mengen	597
12.1.4.2	Kegel	598
12.1.5	Lineare Operatoren und Funktionale	598
12.1.5.1	Abbildungen	598
12.1.5.2	Homomorphismus und Endomorphismus	599
12.1.5.3	Isomorphe Vektorräume	599
12.1.6	Komplexifikation reeller Vektorräume	599
12.1.7	Geordnete Vektorräume	599
12.1.7.1	Kegel und Halbordnung	599
12.1.7.2	Ordnungsbeschränkte Mengen	600
12.1.7.3	Positive Operatoren	601

	12.1.7.4	Vektorverbände	601
12.2		Metrische Räume	602
	12.2.1	Begriff des metrischen Raumes	602
	12.2.1.1	Kugeln und Umgebungen	603
	12.2.1.2	Konvergenz von Folgen im metrischen Raum	604
	12.2.1.3	Abgeschlossene Mengen und Abschließung	604
	12.2.1.4	Dichte Teilmengen und separable metrische Räume	605
	12.2.2	Vollständige metrische Räume	605
	12.2.2.1	Cauchy-Folge	605
	12.2.2.2	Vollständiger metrischer Raum	606
	12.2.2.3	Einige fundamentale Sätze in vollständigen metrischen Räumen	606
	12.2.2.4	Einige Anwendungen des Kontraktionsprinzips	607
	12.2.2.5	Vervollständigung eines metrischen Raumes	608
	12.2.3	Stetige Operatoren	609
12.3		Normierte Räume	609
	12.3.1	Begriff des normierten Raumes	609
	12.3.1.1	Axiome des normierten Raumes	609
	12.3.1.2	Einige Eigenschaften normierter Räume	610
	12.3.2	Banach-Räume	610
	12.3.2.1	Reihen in normierten Räumen	610
	12.3.2.2	Beispiele von Banach-Räumen	610
	12.3.2.3	Sobolew-Räume	611
	12.3.3	Geordnete normierte Räume	611
	12.3.4	Normierte Algebren	612
12.4		Hilbert-Räume	613
	12.4.1	Begriff des Hilbert-Raumes	613
	12.4.1.1	Skalarprodukt	613
	12.4.1.2	Unitäre Räume und einige ihrer Eigenschaften	613
	12.4.1.3	Hilbert-Raum	614
	12.4.2	Orthogonalität	614
	12.4.2.1	Eigenschaften der Orthogonalität	614
	12.4.2.2	Orthogonale Systeme	615
	12.4.3	Fourier-Reihen im Hilbert-Raum	615
	12.4.3.1	Bestapproximation	615
	12.4.3.2	Parsevalsche Gleichung, Satz von Riesz-Fischer	616
	12.4.4	Existenz einer Basis. Isomorphe Hilbert-Räume	616
12.5		Stetige lineare Operatoren und Funktionale	617
	12.5.1	Beschränktheit, Norm und Stetigkeit linearer Operatoren	617
	12.5.1.1	Beschränktheit und Norm linearer Operatoren	617
	12.5.1.2	Raum linearer stetiger Operatoren	617
	12.5.1.3	Konvergenz von Operatorfolgen	618
	12.5.2	Lineare stetige Operatoren in Banach-Räumen	618
	12.5.3	Elemente der Spektraltheorie linearer Operatoren	620
	12.5.3.1	Resolventenmenge und Resolvente eines Operators	620
	12.5.3.2	Spektrum eines Operators	620
	12.5.4	Stetige lineare Funktionale	621
	12.5.4.1	Definition	621
	12.5.4.2	Stetige lineare Funktionale im Hilbert-Raum, Satz von Riesz	621
	12.5.4.3	Stetige lineare Funktionale in $L^p$	622
	12.5.5	Fortsetzung von linearen Funktionalen	622
	12.5.6	Trennung konvexer Mengen	623
	12.5.7	Bidualer Raum und reflexive Räume	624

12.6	Adjungierte Operatoren in normierten Räumen . . . . .	624
12.6.1	Adjungierter Operator zu einem beschränkten Operator . . . . .	624
12.6.2	Adjungierter Operator zu einem unbeschränkten Operator . . . . .	625
12.6.3	Selbstadjungierte Operatoren . . . . .	625
12.6.3.1	Positiv definite Operatoren . . . . .	625
12.6.3.2	Projektoren im Hilbert-Raum . . . . .	626
12.7	Kompakte Mengen und kompakte Operatoren . . . . .	626
12.7.1	Kompakte Teilmengen in normierten Räumen . . . . .	626
12.7.2	Kompakte Operatoren . . . . .	626
12.7.2.1	Begriff des kompakten Operators . . . . .	626
12.7.2.2	Eigenschaften linearer kompakter Operatoren . . . . .	626
12.7.2.3	Schwache Konvergenz von Elementen . . . . .	627
12.7.3	Fredholmsche Alternative . . . . .	627
12.7.4	Kompakte Operatoren im Hilbert-Raum . . . . .	628
12.7.5	Kompakte selbstadjungierte Operatoren . . . . .	628
12.8	Nichtlineare Operatoren . . . . .	628
12.8.1	Beispiele nichtlinearer Operatoren . . . . .	628
12.8.2	Differenzierbarkeit nichtlinearer Operatoren . . . . .	629
12.8.3	Newton-Verfahren . . . . .	629
12.8.4	Schaudersches Fixpunktprinzip . . . . .	630
12.8.5	Leray-Schauder-Theorie . . . . .	630
12.8.6	Positive nichtlineare Operatoren . . . . .	631
12.8.7	Monotone Operatoren in Banach-Räumen . . . . .	631
12.9	Maß und Lebesgue-Integral . . . . .	632
12.9.1	Sigma-Algebren und Maße . . . . .	632
12.9.2	Meßbare Funktionen . . . . .	633
12.9.2.1	Meßbare Funktion . . . . .	633
12.9.2.2	Eigenschaften der Klasse der meßbaren Funktionen . . . . .	634
12.9.3	Integration . . . . .	634
12.9.3.1	Definition des Integrals . . . . .	634
12.9.3.2	Einige Eigenschaften des Integrals . . . . .	634
12.9.3.3	Konvergenzsätze . . . . .	635
12.9.4	$L^p$ -Räume . . . . .	635
12.9.5	Distributionen . . . . .	636
12.9.5.1	Formel der partiellen Integration . . . . .	636
12.9.5.2	Verallgemeinerte Ableitung . . . . .	637
12.9.5.3	Distribution . . . . .	637
12.9.5.4	Ableitung einer Distribution . . . . .	637
<b>13</b>	<b>Vektoranalysis und Feldtheorie</b> . . . . .	<b>639</b>
13.1	Grundbegriffe der Feldtheorie . . . . .	639
13.1.1	Vektorfunktion einer skalaren Variablen . . . . .	639
13.1.1.1	Definitionen . . . . .	639
13.1.1.2	Ableitung einer Vektorfunktion . . . . .	639
13.1.1.3	Differentiationsregeln für Vektoren . . . . .	639
13.1.1.4	Taylor-Entwicklung für Vektorfunktionen . . . . .	640
13.1.2	Skalarfelder . . . . .	640
13.1.2.1	Skalares Feld oder skalare Punktfunktion . . . . .	640
13.1.2.2	Wichtige Fälle skalarer Felder . . . . .	640
13.1.2.3	Koordinatendarstellung von Skalarfeldern . . . . .	641
13.1.2.4	Niveauflächen und Niveaulinien . . . . .	641
13.1.3	Vektorfelder . . . . .	641

	13.1.3.1	Vektoriellcs Feld oder vektorielle Punktfunktion . . . . .	641
	13.1.3.2	Wichtige Fälle vektorieller Felder . . . . .	642
	13.1.3.3	Koordinatendarstellung von Vektorfeldern . . . . .	643
	13.1.3.4	Übergang von einem Koordinatensystem zu einem anderen . . . . .	644
	13.1.3.5	Feldlinien . . . . .	645
13.2		Räumliche Differentialoperationen . . . . .	646
	13.2.1	Richtungs- und Volumenableitung . . . . .	646
	13.2.1.1	Richtungsableitung eines skalaren Feldes . . . . .	646
	13.2.1.2	Richtungsableitung eines vektoriellen Feldes . . . . .	646
	13.2.1.3	Volumenableitung oder räumliche Ableitung . . . . .	647
	13.2.2	Gradient eines Skalarfeldes . . . . .	647
	13.2.2.1	Definition des Gradienten . . . . .	647
	13.2.2.2	Gradient und Richtungsableitung . . . . .	648
	13.2.2.3	Gradient und Volumenableitung . . . . .	648
	13.2.2.4	Weitere Eigenschaften des Gradienten . . . . .	648
	13.2.2.5	Gradient des Skalarfeldes in verschiedenen Koordinaten . . . . .	648
	13.2.2.6	Rechenregeln . . . . .	648
	13.2.3	Vektorgradient . . . . .	649
	13.2.4	Divergenz des Vektorfeldes . . . . .	649
	13.2.4.1	Definition der Divergenz . . . . .	649
	13.2.4.2	Divergenz in verschiedenen Koordinaten . . . . .	650
	13.2.4.3	Regeln zur Berechnung der Divergenz . . . . .	650
	13.2.4.4	Divergenz eines Zentralfeldes . . . . .	650
	13.2.5	Rotation des Vektorfeldes . . . . .	650
	13.2.5.1	Definitionen der Rotation . . . . .	650
	13.2.5.2	Rotation in verschiedenen Koordinaten . . . . .	651
	13.2.5.3	Regeln zur Berechnung der Rotation . . . . .	652
	13.2.5.4	Rotation des Potentialfeldes . . . . .	652
	13.2.6	Nablaoperator, Laplace-Operator . . . . .	653
	13.2.6.1	Nablaoperator . . . . .	653
	13.2.6.2	Rechenregeln für den Nablaoperator . . . . .	653
	13.2.6.3	Vektorgradient . . . . .	653
	13.2.6.4	Zweifache Anwendung des Nablaoperators . . . . .	654
	13.2.6.5	Laplace-Operator . . . . .	654
	13.2.7	Übersicht zu den räumlichen Differentialoperationen . . . . .	655
	13.2.7.1	Vektoranalytische Ausdrücke in kartesischen, Zylinder- und Kugelkoordinaten . . . . .	655
	13.2.7.2	Prinzipielle Verknüpfungen und Ergebnisse für Differentialoperatoren . . . . .	656
	13.2.7.3	Rechenregeln für Differentialoperatoren . . . . .	656
13.3		Integration in Vektorfeldern . . . . .	657
	13.3.1	Kurvenintegral und Potential im Vektorfeld . . . . .	657
	13.3.1.1	Kurvenintegral im Vektorfeld . . . . .	657
	13.3.1.2	Bedeutung des Kurvenintegrals in der Mechanik . . . . .	658
	13.3.1.3	Eigenschaften des Kurvenintegrals . . . . .	658
	13.3.1.4	Kurvenintegral als Kurvenintegral 2. Gattung allgemeiner Art . . . . .	659
	13.3.1.5	Umlaufintegral eines Vektorfeldes . . . . .	659
	13.3.1.6	Konservatives oder Potentialfeld . . . . .	659
	13.3.2	Oberflächenintegrale . . . . .	660
	13.3.2.1	Vektor eines ebenen Flächenstückes . . . . .	660
	13.3.2.2	Berechnung von Oberflächenintegralen . . . . .	661
	13.3.2.3	Oberflächenintegrale und Fluß von Feldern . . . . .	661

13.3.2.4	Oberflächenintegrale in kartesischen Koordinaten	
	Oberflächenintegrale 2. Art . . . . .	662
13.3.3	Integralsätze . . . . .	662
13.3.3.1	Integralsatz und Integralformel von Gauss . . . . .	662
13.3.3.2	Integralsatz von Stokes . . . . .	663
13.3.3.3	Integralsätze von Green . . . . .	664
13.4	Berechnung von Feldern . . . . .	665
13.4.1	Reines Quellenfeld . . . . .	665
13.4.2	Reines Wirbelfeld oder quellenfreies Wirbelfeld . . . . .	665
13.4.3	Vektorfelder mit punktförmigen Quellen . . . . .	666
13.4.3.1	Coulomb-Feld der Punktladung . . . . .	666
13.4.3.2	Gravitationsfeld der Punktmasse . . . . .	666
13.4.4	Superposition von Feldern . . . . .	666
13.4.4.1	Diskrete Quellenverteilung . . . . .	666
13.4.4.2	Kontinuierliche Quellenverteilung . . . . .	666
13.4.4.3	Zusammenfassung . . . . .	666
13.5	Differentialgleichungen der Feldtheorie . . . . .	667
13.5.1	Laplacesche Differentialgleichung . . . . .	667
13.5.2	Poissonsche Differentialgleichung . . . . .	667

**14 Funktionentheorie** **668**

14.1	Funktionen einer komplexen Veränderlichen . . . . .	668
14.1.1	Stetigkeit, Differenzierbarkeit . . . . .	668
14.1.1.1	Definition der komplexen Funktion . . . . .	668
14.1.1.2	Grenzwert der komplexen Funktion . . . . .	668
14.1.1.3	Stetigkeit der komplexen Funktion . . . . .	668
14.1.1.4	Differenzierbarkeit der komplexen Funktion . . . . .	669
14.1.2	Analytische Funktionen . . . . .	669
14.1.2.1	Definition der analytischen Funktion . . . . .	669
14.1.2.2	Beispiele analytischer Funktionen . . . . .	669
14.1.2.3	Eigenschaften analytischer Funktionen . . . . .	670
14.1.2.4	Singuläre Punkte . . . . .	670
14.1.3	Konforme Abbildung . . . . .	671
14.1.3.1	Begriff und Eigenschaften der konformen Abbildung . . . . .	671
14.1.3.2	Einfachste konforme Abbildungen . . . . .	672
14.1.3.3	Schwarzsches Spiegelungsprinzip . . . . .	679
14.1.3.4	Komplexe Potentiale . . . . .	679
14.1.3.5	Superpositionsprinzip . . . . .	681
14.1.3.6	Beliebige Abbildung der komplexen Zahlenebene . . . . .	682
14.2	Integration im Komplexen . . . . .	683
14.2.1	Bestimmtes und unbestimmtes Integral . . . . .	683
14.2.1.1	Definition des Integrals im Komplexen . . . . .	683
14.2.1.2	Eigenschaften und Berechnung komplexer Integrale . . . . .	684
14.2.2	Integralsatz von Cauchy, Hauptsatz der Funktionentheorie . . . . .	685
14.2.2.1	Integralsatz von Cauchy für einfach zusammenhängende Gebiete . . . . .	685
14.2.2.2	Integralsatz von Cauchy für mehrfach zusammenhängende Gebiete . . . . .	686
14.2.3	Integralformeln von Cauchy . . . . .	686
14.2.3.1	Analytische Funktion innerhalb eines Gebietes . . . . .	686
14.2.3.2	Analytische Funktion außerhalb eines Gebietes . . . . .	687
14.3	Potenzreihenentwicklung analytischer Funktionen . . . . .	687
14.3.1	Konvergenz von Reihen mit komplexen Gliedern . . . . .	687
14.3.1.1	Konvergenz einer Zahlenfolge mit komplexen Gliedern . . . . .	687

14.3.1.2	Konvergenz einer unendlichen Reihe mit komplexen Gliedern . . . . .	687
14.3.1.3	Potenzreihen im Komplexen . . . . .	688
14.3.2	Taylor-Reihe . . . . .	689
14.3.3	Prinzip der analytischen Fortsetzung . . . . .	689
14.3.4	Laurent-Entwicklung . . . . .	690
14.3.5	Isolierte singuläre Stellen und der Residuensatz . . . . .	690
14.3.5.1	Isolierte singuläre Stellen . . . . .	690
14.3.5.2	Meromorphe Funktionen . . . . .	691
14.3.5.3	Elliptische Funktionen . . . . .	691
14.3.5.4	Residuum . . . . .	691
14.3.5.5	Residuensatz . . . . .	692
14.4	Berechnung reeller Integrale durch Integration im Komplexen . . . . .	692
14.4.1	Anwendung der Cauchyschen Integralformeln . . . . .	692
14.4.2	Anwendung des Residuensatzes . . . . .	692
14.4.3	Anwendungen des Lemmas von Jordan . . . . .	693
14.4.3.1	Lemma von Jordan . . . . .	693
14.4.3.2	Beispiele zum Lemma von Jordan . . . . .	694
14.5	Algebraische und elementare transzendente Funktionen . . . . .	696
14.5.1	Algebraische Funktionen . . . . .	696
14.5.2	Elementare transzendente Funktionen . . . . .	696
14.5.3	Beschreibung von Kurven in komplexer Form . . . . .	699
14.6	Elliptische Funktionen . . . . .	700
14.6.1	Zusammenhang mit elliptischen Integralen . . . . .	700
14.6.2	Jacobische Funktionen . . . . .	702
14.6.3	Thetafunktionen . . . . .	703
14.6.4	Weierstrasssche Funktionen . . . . .	704
<b>15</b>	<b>Integraltransformationen</b> . . . . .	<b>705</b>
15.1	Begriff der Integraltransformation . . . . .	705
15.1.1	Allgemeine Definition der Integraltransformationen . . . . .	705
15.1.2	Spezielle Integraltransformationen . . . . .	705
15.1.3	Umkehrtransformationen . . . . .	705
15.1.4	Linearität der Integraltransformationen . . . . .	705
15.1.5	Integraltransformationen für Funktionen von mehreren Veränderlichen . . . . .	707
15.1.6	Anwendungen der Integraltransformationen . . . . .	707
15.2	Laplace-Transformation . . . . .	708
15.2.1	Eigenschaften der Laplace-Transformation . . . . .	708
15.2.1.1	Laplace-Transformierte, Original- und Bildbereich . . . . .	708
15.2.1.2	Rechenregeln zur Laplace-Transformation . . . . .	709
15.2.1.3	Bildfunktionen spezieller Funktionen . . . . .	712
15.2.1.4	Diracsche $\delta$ -Funktion und Distributionen . . . . .	715
15.2.2	Rücktransformation in den Originalbereich . . . . .	716
15.2.2.1	Rücktransformation mit Hilfe von Tabellen . . . . .	716
15.2.2.2	Partialbruchzerlegung . . . . .	716
15.2.2.3	Reihenentwicklungen . . . . .	717
15.2.2.4	Umkehrintegral . . . . .	718
15.2.3	Lösung von Differentialgleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation . . . . .	719
15.2.3.1	Gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	719
15.2.3.2	Gewöhnliche Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten . . . . .	720
15.2.3.3	Partielle Differentialgleichungen . . . . .	721
15.3	Fourier-Transformation . . . . .	722
15.3.1	Eigenschaften der Fourier-Transformation . . . . .	722

15.3.1.1	Fourier-Integral . . . . .	722
15.3.1.2	Fourier-Transformation und Umkehrtransformation . . . . .	723
15.3.1.3	Rechenregeln zur Fourier-Transformation . . . . .	725
15.3.1.4	Bildfunktionen spezieller Funktionen . . . . .	728
15.3.2	Lösung von Differentialgleichungen mit Hilfe der Fourier-Transformation . . . . .	729
15.3.2.1	Gewöhnliche lineare Differentialgleichungen . . . . .	729
15.3.2.2	Partielle Differentialgleichungen . . . . .	730
15.4	Z-Transformation . . . . .	732
15.4.1	Eigenschaften der Z-Transformation . . . . .	732
15.4.1.1	Diskrete Funktionen . . . . .	732
15.4.1.2	Definition der Z-Transformation . . . . .	732
15.4.1.3	Rechenregeln . . . . .	733
15.4.1.4	Zusammenhang mit der Laplace-Transformation . . . . .	734
15.4.1.5	Umkehrung der Z-Transformation . . . . .	735
15.4.2	Anwendungen der Z-Transformation . . . . .	736
15.4.2.1	Allgemeine Lösung linearer Differenzgleichungen . . . . .	736
15.4.2.2	Differenzgleichung zweiter Ordnung (Anfangswertaufgabe) . . . . .	737
15.4.2.3	Differenzgleichung zweiter Ordnung (Randwertaufgabe) . . . . .	738
15.5	Wavelet-Transformation . . . . .	738
15.5.1	Signale . . . . .	738
15.5.2	Wavelets . . . . .	739
15.5.3	Wavelet-Transformation . . . . .	740
15.5.4	Diskrete Wavelet-Transformation . . . . .	741
15.5.4.1	Schnelle Wavelet-Transformation . . . . .	741
15.5.4.2	Diskrete Haar-Wavelet-Transformation . . . . .	741
15.5.5	Gabor-Transformation . . . . .	741
15.6	WALSH-Funktionen . . . . .	742
15.6.1	Treppenfunktionen . . . . .	742
15.6.2	WALSH-Systeme . . . . .	742
<b>16</b>	<b>Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik</b>	<b>743</b>
16.1	Kombinatorik . . . . .	743
16.1.1	Permutationen . . . . .	743
16.1.2	Kombinationen . . . . .	743
16.1.3	Variationen . . . . .	744
16.1.4	Zusammenstellung der Formeln der Kombinatorik . . . . .	745
16.2	Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . . .	745
16.2.1	Ereignisse, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten . . . . .	745
16.2.1.1	Ereignisse . . . . .	745
16.2.1.2	Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten . . . . .	746
16.2.1.3	Bedingte Wahrscheinlichkeiten, Satz von Bayes . . . . .	748
16.2.2	Zufallsgrößen, Verteilungsfunktion . . . . .	749
16.2.2.1	Zufallsveränderliche . . . . .	749
16.2.2.2	Verteilungsfunktion . . . . .	749
16.2.2.3	Erwartungswert und Streuung, Tschebyscheffsche Ungleichung . . . . .	750
16.2.2.4	Mehrdimensionale Zufallsveränderliche . . . . .	752
16.2.3	Diskrete Verteilungen . . . . .	752
16.2.3.1	Binomialverteilung . . . . .	752
16.2.3.2	Hypergeometrische Verteilung . . . . .	753
16.2.3.3	Poisson-Verteilung . . . . .	754
16.2.4	Stetige Verteilungen . . . . .	755
16.2.4.1	Normalverteilung . . . . .	755



	16.2.4.2	Normierte Normalverteilung, Gaußsches Fehlerintegral . . . . .	756
	16.2.4.3	Logarithmische Normalverteilung . . . . .	757
	16.2.4.4	Exponentialverteilung . . . . .	758
	16.2.4.5	Weibull-Verteilung . . . . .	758
	16.2.4.6	$\chi^2$ -Verteilung . . . . .	759
	16.2.4.7	Fisher-Verteilung . . . . .	760
	16.2.4.8	STUDENT-Verteilung . . . . .	761
	16.2.5	Gesetze der großen Zahlen, Grenzwertsätze . . . . .	761
16.3		Mathematische Statistik . . . . .	762
	16.3.1	Stichprobenfunktionen . . . . .	763
	16.3.1.1	Grundgesamtheit, Stichproben, Zufallsvektor . . . . .	763
	16.3.1.2	Stichprobenfunktionen . . . . .	764
	16.3.2	Beschreibende Statistik . . . . .	765
	16.3.2.1	Statistische Erfassung gegebener Meßwerte . . . . .	765
	16.3.2.2	Statistische Parameter . . . . .	766
	16.3.3	Wichtige Prüfverfahren . . . . .	767
	16.3.3.1	Prüfen auf Normalverteilung . . . . .	767
	16.3.3.2	Verteilung der Stichprobenmittelwerte . . . . .	769
	16.3.3.3	Vertrauensgrenzen für den Mittelwert . . . . .	770
	16.3.3.4	Vertrauensgrenzen für die Streuung . . . . .	771
	16.3.3.5	Prinzip der Prüfverfahren . . . . .	772
	16.3.4	Korrelation und Regression . . . . .	772
	16.3.4.1	Lineare Korrelation bei zwei meßbaren Merkmalen . . . . .	772
	16.3.4.2	Lineare Regression bei zwei meßbaren Merkmalen . . . . .	773
	16.3.4.3	Mehrdimensionale Regression . . . . .	774
	16.3.5	Monte-Carlo-Methode . . . . .	776
	16.3.5.1	Simulation . . . . .	776
	16.3.5.2	Zufallszahlen . . . . .	776
	16.3.5.3	Beispiel für eine Monte-Carlo-Simulation . . . . .	777
	16.3.5.4	Anwendungen der Monte-Carlo-Methode in der numerischen Mathematik . . . . .	778
	16.3.5.5	Weitere Anwendungen der Monte-Carlo-Methode . . . . .	780
16.4		Theorie der Meßfehler . . . . .	781
	16.4.1	Meßfehler und ihre Verteilung . . . . .	781
	16.4.1.1	Meßfehlerreinteilung nach qualitativen Merkmalen . . . . .	781
	16.4.1.2	Meßfehlerverteilungsdichte . . . . .	781
	16.4.1.3	Meßfehlerreinteilung nach quantitativen Merkmalen . . . . .	783
	16.4.1.4	Angabe von Meßergebnissen mit Fehlergrenzen . . . . .	786
	16.4.1.5	Fehlerrechnung für direkte Messungen gleicher Genauigkeit . . . . .	786
	16.4.1.6	Fehlerrechnung für direkte Messungen ungleicher Genauigkeit . . . . .	787
	16.4.2	Fehlerfortpflanzung und Fehleranalyse . . . . .	788
	16.4.2.1	Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz . . . . .	788
	16.4.2.2	Fehleranalyse . . . . .	789
<b>17</b>		<b>Dynamische Systeme und Chaos</b> . . . . .	<b>791</b>
	17.1	Gewöhnliche Differentialgleichungen und Abbildungen . . . . .	791
	17.1.1	Dynamische Systeme . . . . .	791
	17.1.1.1	Grundbegriffe . . . . .	791
	17.1.1.2	Invariante Mengen . . . . .	793
	17.1.2	Qualitative Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen . . . . .	794
	17.1.2.1	Existenz des Flusses und Phasenraumstruktur . . . . .	794
	17.1.2.2	Lineare Differentialgleichungen . . . . .	796

	17.1.2.3	Stabilitätstheorie	797
	17.1.2.4	Invariante Mannigfaltigkeiten	801
	17.1.2.5	Poincaré-Abbildung	804
	17.1.2.6	Topologische Äquivalenz von Differentialgleichungen	805
17.1.3		Diskrete dynamische Systeme	806
	17.1.3.1	Ruhelagen, periodische Orbits und Grenzengen	806
	17.1.3.2	Invariante Mannigfaltigkeiten	806
	17.1.3.3	Topologische Konjugiertheit von diskreten Systemen	807
17.1.4		Strukturelle Stabilität (Robustheit)	808
	17.1.4.1	Strukturstabile Differentialgleichungen	808
	17.1.4.2	Strukturstabile diskrete Systeme	809
	17.1.4.3	Generische Eigenschaften	809
17.2		Quantitative Beschreibung von Attraktoren	810
17.2.1		Wahrscheinlichkeitsmaße auf Attraktoren	810
	17.2.1.1	Invariantes Maß	810
	17.2.1.2	Elemente der Ergodentheorie	811
17.2.2		Entropien	813
	17.2.2.1	Topologische Entropie	813
	17.2.2.2	Metrische Entropie	814
17.2.3		Lyapunov-Exponenten	814
17.2.4		Dimensionen	816
	17.2.4.1	Metrische Dimensionen	816
	17.2.4.2	Auf invariante Maße zurückgehende Dimensionen	818
	17.2.4.3	Lokale Hausdorff-Dimension nach Douady-Oesterlé	820
	17.2.4.4	Beispiele von Attraktoren	821
	17.2.5	Seltsame Attraktoren und Chaos	823
	17.2.6	Chaos in eindimensionalen Abbildungen	824
17.3		Bifurkationstheorie und Wege zum Chaos	824
17.3.1		Bifurkationen in Morse-Smale-Systemen	824
	17.3.1.1	Lokale Bifurkationen nahe Ruhelagen	824
	17.3.1.2	Lokale Bifurkationen nahe einem periodischen Orbit	830
	17.3.1.3	Globale Bifurkationen	833
17.3.2		Übergänge zum Chaos	834
	17.3.2.1	Kaskade von Periodenverdopplungen	834
	17.3.2.2	Intermittenz	834
	17.3.2.3	Globale homokline Bifurkationen	835
	17.3.2.4	Auflösung eines Torus	836
<b>18</b>		<b>Optimierung</b>	<b>841</b>
18.1		Lineare Optimierung	841
18.1.1		Problemstellung und geometrische Darstellung	841
	18.1.1.1	Formen der linearen Optimierung	841
	18.1.1.2	Beispiele und graphische Lösungen	842
18.1.2		Grundbegriffe der linearen Optimierung, Normalform	843
	18.1.2.1	Ecke und Basis	843
	18.1.2.2	Normalform der linearen Optimierungsaufgabe	845
18.1.3		Simplexverfahren	846
	18.1.3.1	Simplextableau	846
	18.1.3.2	Übergang zum neuen Simplextableau	847
	18.1.3.3	Bestimmung eines ersten Simplextableaus	848
	18.1.3.4	Revidiertes Simplexverfahren	849
	18.1.3.5	Dualität in der linearen Optimierung	851

18.1.4	Spezielle lineare Optimierungsprobleme . . . . .	852
18.1.4.1	Transportproblem . . . . .	852
18.1.4.2	Zuordnungsproblem . . . . .	854
18.1.4.3	Verteilungsproblem . . . . .	855
18.1.4.4	Rundreiseproblem . . . . .	855
18.1.4.5	Reihenfolgeproblem . . . . .	855
18.2	Nichtlineare Optimierung . . . . .	856
18.2.1	Problemstellung und theoretische Grundlagen . . . . .	856
18.2.1.1	Problemstellung . . . . .	856
18.2.1.2	Optimalitätsbedingungen . . . . .	856
18.2.1.3	Dualität in der Optimierung . . . . .	857
18.2.2	Spezielle nichtlineare Optimierungsaufgaben . . . . .	858
18.2.2.1	Konvexe Optimierung . . . . .	858
18.2.2.2	Quadratische Optimierung . . . . .	858
18.2.3	Lösungsverfahren für quadratische Optimierungsaufgaben . . . . .	859
18.2.3.1	Verfahren von Wolfe . . . . .	859
18.2.3.2	Verfahren von Hildreth-d'Esopo . . . . .	861
18.2.4	Numerische Suchverfahren . . . . .	861
18.2.4.1	Eindimensionale Suche . . . . .	862
18.2.4.2	Minimumsuche im $n$ -dimensionalen euklidischen Vektorraum . . . . .	862
18.2.5	Verfahren für unrestringierte Aufgaben . . . . .	863
18.2.5.1	Verfahren des steilsten Abstieges (Gradientenverfahren) . . . . .	863
18.2.5.2	Anwendung des Newton-Verfahrens . . . . .	863
18.2.5.3	Verfahren der konjugierten Gradienten . . . . .	864
18.2.5.4	Verfahren von Davidon, Fletcher und Powell (DFP) . . . . .	864
18.2.6	Gradientenverfahren für Probleme mit Ungleichungsrestriktionen . . . . .	865
18.2.6.1	Verfahren der zulässigen Richtungen . . . . .	865
18.2.6.2	Verfahren der projizierten Gradienten . . . . .	867
18.2.7	Straf- und Barriereverfahren . . . . .	869
18.2.7.1	Strafverfahren . . . . .	869
18.2.7.2	Barriereverfahren . . . . .	870
18.2.8	Schnittebenenverfahren . . . . .	871
18.3	Diskrete dynamische Optimierung . . . . .	872
18.3.1	Diskrete dynamische Entscheidungsmodelle . . . . .	872
18.3.1.1	$n$ -stufige Entscheidungsprozesse . . . . .	872
18.3.1.2	Dynamische Optimierungsprobleme . . . . .	872
18.3.2	Beispiele diskreter Entscheidungsmodelle . . . . .	873
18.3.2.1	Einkaufsproblem . . . . .	873
18.3.2.2	Rucksackproblem . . . . .	873
18.3.3	Bellmannsche Funktionalgleichungen . . . . .	873
18.3.3.1	Eigenschaften der Kostenfunktion . . . . .	873
18.3.3.2	Formulierung der Funktionalgleichungen . . . . .	874
18.3.4	Bellmannsches Optimalitätsprinzip . . . . .	875
18.3.5	Bellmannsche Funktionalgleichungsmethode . . . . .	875
18.3.5.1	Bestimmung der minimalen Kosten . . . . .	875
18.3.5.2	Bestimmung der optimalen Politik . . . . .	875
18.3.6	Beispiele zur Anwendung der Funktionalgleichungsmethode . . . . .	876
18.3.6.1	Optimale Einkaufspolitik . . . . .	876
18.3.6.2	Rucksackproblem . . . . .	877

<b>19 Numerische Mathematik</b>	<b>878</b>
19.1 Numerische Lösung nichtlinearer Gleichungen mit einer Unbekannten	878
19.1.1 Iterationsverfahren	878
19.1.1.1 Gewöhnliches Iterationsverfahren	878
19.1.1.2 Newton-Verfahren	879
19.1.1.3 Regula falsi	880
19.1.2 Lösung von Polynomgleichungen	881
19.1.2.1 Horner-Schema	881
19.1.2.2 Lage der Nullstellen	882
19.1.2.3 Numerische Verfahren	883
19.2 Numerische Lösung von Gleichungssystemen	884
19.2.1 Lineare Gleichungssysteme	884
19.2.1.1 Dreieckszerlegung einer Matrix	885
19.2.1.2 Cholesky-Verfahren bei symmetrischer Koeffizientenmatrix	887
19.2.1.3 Orthogonalisierungsverfahren	887
19.2.1.4 Iteration in Gesamt- und Einzelschritten	889
19.2.2 Nichtlineare Gleichungssysteme	890
19.2.2.1 Gewöhnliches Iterationsverfahren	890
19.2.2.2 Newton-Verfahren	891
19.2.2.3 Ableitungsfreies Gauß-Newton-Verfahren	891
19.3 Numerische Integration	892
19.3.1 Allgemeine Quadraturformel	892
19.3.2 Interpolationsquadraturen	893
19.3.2.1 Rechteckformel	893
19.3.2.2 Trapezformel	893
19.3.2.3 Hermiteische Trapezformel	894
19.3.2.4 Simpson-Formel	894
19.3.3 Quadraturformeln vom Gauß-Typ	894
19.3.3.1 Gaußsche Quadraturformeln	894
19.3.3.2 Lobattosche Quadraturformeln	895
19.3.4 Verfahren von Romberg	895
19.3.4.1 Algorithmus des Romberg-Verfahrens	895
19.3.4.2 Extrapolationsprinzip	896
19.4 Genäherte Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen	898
19.4.1 Anfangswertaufgaben	898
19.4.1.1 Eulersches Polygonzugverfahren	898
19.4.1.2 Runge-Kutta-Verfahren	899
19.4.1.3 Mehrschrittverfahren	899
19.4.1.4 Prediktor-Korrektor-Verfahren	900
19.4.1.5 Konvergenz, Konsistenz, Stabilität	901
19.4.2 Randwertaufgaben	902
19.4.2.1 Differenzenverfahren	902
19.4.2.2 Ansatzverfahren	903
19.4.2.3 Schießverfahren	904
19.5 Genäherte Integration von partiellen Differentialgleichungen	905
19.5.1 Differenzenverfahren	905
19.5.2 Ansatzverfahren	906
19.5.3 Methode der finiten Elemente (FEM)	907
19.6 Approximation, Ausgleichsrechnung, Harmonische Analyse	912
19.6.1 Polynominterpolation	912
19.6.1.1 Newtonsche Interpolationsformel	912
19.6.1.2 Interpolationsformel nach Lagrange	912

19.6.1.3	Interpolation nach Aitken–Neville	913
19.6.2	Approximation im Mittel	914
19.6.2.1	Stetige Aufgabe, Normalgleichungen	914
19.6.2.2	Diskrete Aufgabe, Normalgleichungen, Householder–Verfahren	915
19.6.2.3	Mehrdimensionale Aufgaben	916
19.6.2.4	Nichtlineare Quadratmittelaufgaben	917
19.6.3	Tschebyscheff–Approximation	918
19.6.3.1	Aufgabenstellung und Alternantensatz	918
19.6.3.2	Eigenschaften der TSCHEBYSCHJEFF–Polynome	918
19.6.3.3	Remes–Algorithmus	920
19.6.3.4	Diskrete Tschebyscheff–Approximation und Optimierung	920
19.6.4	Harmonische Analyse	921
19.6.4.1	Formeln zur trigonometrischen Interpolation	921
19.6.4.2	Schnelle Fourier–Transformation (FFT)	922
19.7	Darstellung von Kurven und Flächen mit Hilfe von Splines	926
19.7.1	Kubische Splines	926
19.7.1.1	Interpolationssplines	926
19.7.1.2	Ausgleichssplines	927
19.7.2	Bikubische Splines	928
19.7.2.1	Bikubische Interpolationssplines	928
19.7.2.2	Bikubische Ausgleichssplines	929
19.7.3	Bernstein–Bézier–Darstellung von Kurven und Flächen	929
19.7.3.1	Prinzip der B–B–Kurvendarstellung	930
19.7.3.2	B–B–Flächendarstellung	930
19.8	Nutzung von Computern	931
19.8.1	Interne Zeichendarstellung	931
19.8.1.1	Zahlensysteme	931
19.8.1.2	Interne Zahlendarstellung	932
19.8.2	Numerische Probleme beim Rechnen auf Computern	934
19.8.2.1	Einführung, Fehlerarten	934
19.8.2.2	Normalisierte Dezimalzahlen und Rundung	934
19.8.2.3	Genauigkeitsfragen beim numerischen Rechnen	936
19.8.3	Bibliotheken numerischer Verfahren	939
19.8.3.1	NAG–Bibliothek	940
19.8.3.2	IMSL–Bibliothek	940
19.8.3.3	FORTTRAN SSL II	941
19.8.3.4	Aachener Bibliothek	941
19.8.4	Anwendung von Computeralgebrasystemen	941
19.8.4.1	Mathematica	941
19.8.4.2	Maple	945
<b>20</b>	<b>Computeralgebrasysteme</b>	<b>948</b>
20.1	Einführung	948
20.1.1	Kurzcharakteristik von Computeralgebrasystemen	948
20.1.2	Einführende Beispiele für die Hauptanwendungsgebiete	949
20.1.2.1	Formelmanipulation	949
20.1.2.2	Numerische Berechnungen	949
20.1.2.3	Graphische Darstellungen	950
20.1.2.4	Programmierung in Computeralgebrasystemen	950
20.1.3	Aufbau von und Umgang mit Computeralgebrasystemen	950
20.1.3.1	Hauptstrukturelemente	950
20.2	Mathematica	952

20.2.1	Hauptstrukturelemente	952
20.2.2	Zahlenarten in Mathematica	953
20.2.2.1	Grundtypen von Zahlen in Mathematica	953
20.2.2.2	Spezielle Zahlen	953
20.2.2.3	Darstellung und Konvertierung von Zahlen	954
20.2.3	Wichtige Operatoren	954
20.2.4	Listen	955
20.2.4.1	Begriff und Bedeutung	955
20.2.4.2	Verschachtelte Listen	956
20.2.4.3	Operationen mit Listen	956
20.2.4.4	Spezielle Listen	956
20.2.5	Vektoren und Matrizen als Listen	957
20.2.5.1	Aufstellung geeigneter Listen	957
20.2.5.2	Operationen mit Matrizen und Vektoren	957
20.2.6	Funktionen	959
20.2.6.1	Standardfunktionen	959
20.2.6.2	Spezielle Funktionen	959
20.2.6.3	Reine Funktionen	959
20.2.7	Muster	959
20.2.8	Funktionaloperationen	960
20.2.9	Programmierung	961
20.2.10	Ergänzungen zur Syntax, Informationen, Meldungen	962
20.2.10.1	Kontexte, Attribute	962
20.2.10.2	Informationen	963
20.2.10.3	Meldungen	963
20.3	Maple	964
20.3.1	Hauptstrukturelemente	964
20.3.1.1	Typen und Objekte	964
20.3.1.2	Eingaben und Ausgaben	965
20.3.2	Zahlenarten in Maple	965
20.3.2.1	Grundtypen von Zahlen in Maple	965
20.3.2.2	Spezielle Zahlen	966
20.3.2.3	Darstellung und Konvertierung von Zahlen	966
20.3.3	Wichtige Operatoren in Maple	967
20.3.4	Algebraische Ausdrücke	967
20.3.5	Folgen und Listen	968
20.3.6	Tabellen- und feldartige Strukturen, Vektoren und Matrizen	969
20.3.6.1	Tabellen- und feldartige Strukturen	969
20.3.6.2	Eindimensionale Felder	970
20.3.6.3	Zweidimensionale Felder	970
20.3.6.4	Spezielle Anweisungen zu Vektoren und Matrizen	971
20.3.7	Funktionen und Operatoren	971
20.3.7.1	Funktionen	971
20.3.7.2	Operatoren	972
20.3.7.3	Differentialoperatoren	973
20.3.7.4	Der Funktionaloperator <code>map</code>	973
20.3.8	Programmierung in Maple	973
20.3.9	Ergänzungen zur Syntax, Informationen und Hilfe	974
20.3.9.1	Nutzung der Maple-Bibliothek	974
20.3.9.2	Umgebungsvariable	974
20.3.9.3	Informationen und Hilfe	975
20.4	Anwendungen von Computeralgebrasystemen	975

20.4.1	Manipulation algebraischer Ausdrücke . . . . .	975
20.4.1.1	Mathematica . . . . .	975
20.4.1.2	Maple . . . . .	977
20.4.2	Lösung von Gleichungen und Gleichungssystemen . . . . .	980
20.4.2.1	Mathematica . . . . .	981
20.4.2.2	Maple . . . . .	982
20.4.3	Elemente der linearen Algebra . . . . .	984
20.4.3.1	Mathematica . . . . .	984
20.4.3.2	Maple . . . . .	986
20.4.4	Differential- und Integralrechnung . . . . .	989
20.4.4.1	Mathematica . . . . .	989
20.4.4.2	Maple . . . . .	992
20.5	Graphik in Computeralgebrasystemen . . . . .	995
20.5.1	Graphik mit Mathematica . . . . .	995
20.5.1.1	Grundlagen des Graphikaufbaus . . . . .	995
20.5.1.2	Graphik-Primitive . . . . .	996
20.5.1.3	Graphikoptionen . . . . .	997
20.5.1.4	Syntax der Graphikdarstellung . . . . .	997
20.5.1.5	Zweidimensionale Kurven . . . . .	999
20.5.1.6	Parameterdarstellung von Kurven . . . . .	1000
20.5.1.7	Darstellung von Flächen und Raumkurven . . . . .	1001
20.5.2	Graphik mit Maple . . . . .	1003
20.5.2.1	Zweidimensionale Graphik . . . . .	1003
20.5.2.2	Dreidimensionale Graphik . . . . .	1006

**21 Tabellen**

**1009**

21.1	Häufig gebrauchte Konstanten . . . . .	1009
21.2	Naturkonstanten . . . . .	1009
21.3	Potenzreihenentwicklungen . . . . .	1011
21.4	Fourier-Entwicklungen . . . . .	1016
21.5	Unbestimmte Integrale . . . . .	1019
21.5.1	Integrale rationaler Funktionen . . . . .	1019
21.5.1.1	Integrale mit $X = ax + b$ . . . . .	1019
21.5.1.2	Integrale mit $X = ax^2 + bx + c$ . . . . .	1021
21.5.1.3	Integrale mit $X = a^2 \pm x^2$ . . . . .	1022
21.5.1.4	Integrale mit $X = a^3 \pm x^3$ . . . . .	1024
21.5.1.5	Integrale mit $X = a^4 + x^4$ . . . . .	1025
21.5.1.6	Integrale mit $X = a^4 - x^4$ . . . . .	1025
21.5.1.7	Einige Fälle der Partialbruchzerlegung . . . . .	1025
21.5.2	Integrale irrationaler Funktionen . . . . .	1026
21.5.2.1	Integrale mit $\sqrt{x}$ und $a^2 \pm b^2x$ . . . . .	1026
21.5.2.2	Andere Integrale mit $\sqrt{x}$ . . . . .	1026
21.5.2.3	Integrale mit $\sqrt{ax + b}$ . . . . .	1027
21.5.2.4	Integrale mit $\sqrt{ax + b}$ und $\sqrt{fx + g}$ . . . . .	1028
21.5.2.5	Integrale mit $\sqrt{a^2 - x^2}$ . . . . .	1029
21.5.2.6	Integrale mit $\sqrt{x^2 + a^2}$ . . . . .	1030
21.5.2.7	Integrale mit $\sqrt{x^2 - a^2}$ . . . . .	1032
21.5.2.8	Integrale mit $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ . . . . .	1034
21.5.2.9	Integrale mit anderen irrationalen Ausdrücken . . . . .	1036
21.5.2.10	Rekursionsformeln für Integral mit binomischem Differential . . . . .	1036
21.5.3	Integrale trigonometrischer Funktionen . . . . .	1037

21.5.3.1	Integrale mit Sinusfunktion . . . . .	1037
21.5.3.2	Integrale mit Kosinusfunktion . . . . .	1039
21.5.3.3	Integrale mit Sinus- und Kosinusfunktion . . . . .	1042
21.5.3.4	Integrale mit Tangensfunktion . . . . .	1045
21.5.3.5	Integrale mit Kotangensfunktion . . . . .	1045
21.5.4	Integrale anderer transzendenter Funktionen . . . . .	1046
21.5.4.1	Integrale mit Hyperbelfunktionen . . . . .	1046
21.5.4.2	Integrale mit Exponentialfunktionen . . . . .	1047
21.5.4.3	Integrale mit logarithmischen Funktionen . . . . .	1049
21.5.4.4	Integrale mit inversen trigonometrischen Funktionen . . . . .	1050
21.5.4.5	Integrale mit inversen Hyperbelfunktion . . . . .	1051
21.6	Bestimmte Integrale . . . . .	1052
21.6.1	Bestimmte Integrale trigonometrischer Funktionen . . . . .	1052
21.6.2	Bestimmte Integrale von Exponentialfunktionen . . . . .	1053
21.6.3	Bestimmte Integrale logarithmischer Funktionen . . . . .	1054
21.6.4	Bestimmte Integrale algebraischer Funktionen . . . . .	1055
21.7	Elliptische Integrale . . . . .	1057
21.7.1	Elliptische Integrale 1. Art $F(\varphi, k)$ , $k = \sin \alpha$ . . . . .	1057
21.7.2	Elliptische Integrale 2. Art $E(\varphi, k)$ , $k = \sin \alpha$ . . . . .	1057
21.7.3	Vollständige elliptische Integrale, $k = \sin \alpha$ . . . . .	1058
21.8	Gammafunktion . . . . .	1059
21.9	Besselsche Funktionen (Zylinderfunktionen) . . . . .	1060
21.10	Legendresche Polynome 1. Art (Kugelfunktionen) . . . . .	1062
21.11	Laplace-Transformationen . . . . .	1063
21.12	Fourier-Transformationen . . . . .	1069
21.12.1	Kosinus-Fourier-Transformationen . . . . .	1069
21.12.2	Sinus-Fourier-Transformationen . . . . .	1075
21.12.3	Exponentielle Fourier-Transformationen . . . . .	1081
21.13	Z-Transformationen . . . . .	1082
21.14	Poisson-Verteilung . . . . .	1085
21.15	Normierte Normalverteilung . . . . .	1087
21.15.1	Normierte Normalverteilung für $0.00 \leq x \leq 1.99$ . . . . .	1087
21.15.2	Normierte Normalverteilung für $2.00 \leq x \leq 3.90$ . . . . .	1088
21.16	$\chi^2$ -Verteilung . . . . .	1089
21.17	Fishersche $F$ -Verteilung . . . . .	1090
21.18	Studentsche $t$ -Verteilung . . . . .	1092
21.19	Zufallszahlen . . . . .	1093

22 Literatur 1094

Stichwortverzeichnis 1109