

Josef Honerkamp

Stochastische Dynamische Systeme

Konzepte, numerische Methoden,
Datenanalysen



Inhalt

1	Stochastische Prozesse und komplexe Systeme	1
2	Zufallsvariablen	5
2.1	Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundbegriffe.....	5
2.2	Charakteristische Größen einer Verteilung: Momente, Quantile und Kumulanten	12
2.3	Addition von stochastischen Variablen, der zentrale Grenzwertsatz.....	16
2.4	Die Erzeugung von Zufallszahlen	19
2.4.1	Die Erzeugung von gleichverteilten Zufallszahlen	19
2.4.2	Die Erzeugung von Zufallszahlen einer bestimmten Verteilung durch Koordinatentransformationen.....	21
2.4.3	Erzeugung von Zufallszahlen durch Dimensionsreduktion.....	23
2.4.4	Die Verwerfungsmethode	26
3	Analyse stationärer Daten.....	29
3.1	Messung von Momenten	29
3.1.1	Stichproben, Schätzfunktionen und Standardfehler.....	29
3.1.2	Anwendung: Die Monte-Carlo-Integration	34
3.1.3	Fehlerfortpflanzung	39
3.2	Vergleich von Meßreihen	41
3.2.1	Allgemeines zur Prüfung statistischer Hypothesen.....	41
3.2.2	Der Test auf Gleichheit der Mittelwerte zweier Meßreihen, der Studentsche t -Test	43
3.2.3	Der Test auf Gleichheit der Varianzen zweier Meßreihen, der F -Test...	44
3.2.4	Der χ^2 -Test	46
3.2.5	Der Kolmogorov-Smirnov-Test.....	48
3.3	Das Prinzip der maximalen Wahrscheinlichkeit (die Maximum-Likelihood-Methode).....	49
3.4	Lineare Regressionsverfahren	51
3.4.1	Das Maximum-Likelihood-Prinzip und die Methode der kleinsten Quadrate	51
3.4.2	Bestimmung der Parameter mit der Methode der kleinsten Quadrate ...	52
3.4.3	Bewertung der Anpassung und Vorgehen bei Unbekanntheit der Fehler.....	57

3.4.4	Konfidenzgebiete für die Parameter	58
3.5	Statistische Abhängigkeiten	61
3.5.1	Die bedingte Wahrscheinlichkeit	61
3.5.2	Test auf statistische Unabhängigkeit	62
3.5.3	Kovarianz und Korrelation	63
4	Grundlegende Gleichungen für stochastische Prozesse	65
4.1	Markov-Prozesse	65
4.1.1	Zufallsprozesse, zeitabhängige Zufallsvariablen	65
4.1.2	Das Gaußsche weiße Rauschen	66
4.1.3	Die Markov-Bedingung	68
4.1.4	Die Chapman-Kolmogorov-Gleichung	69
4.1.5	Zwei-Zeit-Momente und Kovarianzfunktionen	70
4.1.6	Beispiele	71
4.2	Die Master-Gleichung	73
4.3	Die Fokker-Planck-Gleichung	74
4.3.1	Die Herleitung der Gleichung	74
4.3.2	Die adjungierte Fokker-Planck-Gleichung	79
4.4	Stochastische Differentialgleichungen	80
4.4.1	Die Langevin-Gleichung für die Brownsche Diffusion als ein Beispiel für eine stochastische Differentialgleichung	80
4.4.2	Die Ito-Formel	81
4.4.3	Additives und multiplikatives Rauschen	82
4.4.4	Äquivalenz von Fokker-Planck-Gleichung und Langevin-Gleichung	86
5	Master-Gleichungen	89
5.1	Verschiedene Anwendungen der Master-Gleichung	89
5.2	Ränder und Randbedingungen	92
5.3	Analytische Verfahren zur Lösung der Master-Gleichung	94
5.3.1	Gleichungen für die Momente	94
5.3.2	Eine Gleichung für die erzeugende Funktion	96
5.3.3	Die Spiegelbildmethode	100
5.4	Berechnung einer stationären Verteilung	101
5.5	Die mittlere Zeit bis zum Erreichen einer Schwelle, das "first passage" Problem	104
5.5.1	Dichteverteilung und Momente für die Zufallszeit T	104
5.5.2	Gleichungen für die Momente	106
6	Numerische Verfahren zur Lösung von Master-Gleichungen	111
6.1	Berechnung der Dichte: Die Master-Gleichung als Differentialgleichung	111
6.2	Simulation von Trajektorien	114
6.2.1	Die Standardmethoden mit festem bzw. stochastischem Zeitschritt	114

6.2.2	Varianten, Einteilung der Übergänge in verschiedene Klassen.....	117
6.2.3	Beispiele	120
6.3	Simulation stationärer Verteilungen und Erwartungswerte	125
6.4	Monte-Carlo-Methoden in der Statistischen Mechanik der Gleichgewichtszustände	128
6.4.1	Die Idee der Monte-Carlo-Methode	128
6.4.2	Konstruktion einer Master-Gleichung	129
6.4.3	Besonderheiten	130
6.4.4	Beispiel: Das zweidimensionale Ising-Modell	131
7	Stochastische Differentialgleichungen: Analytische Verfahren	135
7.1	Beispiele stochastischer Differentialgleichungen aus der Dynamik polymerer Fluide	135
7.2	Ränder des Zustandsraumes und Randbedingungen	143
7.3	Exakte Lösungen für einen diffusiven Prozeß mit linearem Driftterm und additivem Rauschen	146
7.3.1	Momente und Dichteverteilung	146
7.3.2	Beispiele und Anwendungen	151
7.3.3	Die Zwei-Zeit-Kovarianzfunktion	155
7.4	Stationäre Lösungen der Fokker-Planck-Gleichung	157
7.4.1	Die stationäre Dichtefunktion und ihre Extrema	157
7.4.2	Beispiele für den Fall des additiven Rauschens	160
7.4.3	Stationäre Dichtefunktionen bei multiplikativem Rauschen, Rauschen-induzierte Übergänge	162
7.5	Zufallszeiten bis zum Erreichen einer Schwelle	166
7.5.1	Die Dichtefunktion für die Zufallszeit, Gleichungen für die Momente ..	166
7.5.2	Beispiele: Zeitverteilungen und mittlere Zeiten für Wiener- und Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß	169
7.5.3	Anwendung: Das Entweichen aus einem Einzugsbereich eines bistabilen Systems	171
8	Numerische Methoden für stochastische Differentialgleichungen	175
8.1	Die Entwicklung nach der Schrittweite h	175
8.2	Verfahren für die Schätzung einer Meßgröße $\langle M(X(t)) \rangle$	178
8.2.1	Ein Verfahren niedrigster Ordnung, das Euler-Verfahren	178
8.2.2	Ein Verfahren höherer Ordnung für additives Rauschen, das Heun-Verfahren	179
8.2.3	Andere Verfahren zur Schätzung von $\langle M(X(t)) \rangle$	180
8.2.4	Allgemeine Bemerkungen zu den Schätzungen der Meßwerte	180
8.2.5	Beispiele	181
8.3	Stochastische Prozesse mit Zwangsbedingungen	183
8.4	Numerische Berechnung stationärer Momente	186
8.5	Die mittlere quadratische Konvergenz	187

8.6	Numerische Berechnung der mittleren Zeit für das Erreichen einer Schwelle	191
8.6.1	Modifiziertes Euler-Verfahren mit linearer Konvergenz	191
8.6.2	Die Berechnung der Größe $f(x', x, h)$	192
8.6.3	Beispiele	193
9	Funktionalintegrale in der Stochastik	197
9.1	Funktionalintegrale	197
9.2	Höhere Momente und deren erzeugendes Funktional	201
9.3	Die Response-Funktion: die lineare Antwort eines Systems auf äußere Kräfte	203
9.3.1	Alternative Darstellungen des erzeugenden Funktionals	203
9.3.2	Einführung der Response-Funktion	205
9.4	Gaußsche Prozesse und Gaußsche Funktionalintegrale	208
9.4.1	Das erzeugende Funktional der höheren Momente für Gaußsche Prozesse	208
9.4.2	Zwei-Zeit-Kovarianzfunktion und Response-Funktion	211
10	Störungstheorie und einige Näherungen, die darüber hinausgehen	213
10.1	Störungstheorie	213
10.1.1	Die Idee der störungstheoretischen Entwicklung	213
10.1.2	Beispiel und Einführung der Feynman-Graphen	214
10.1.3	Störungstheorie ohne Funktionalintegrale	221
10.2	Verschiedene Kategorien von Graphen	224
10.2.1	Kumulanten als Summe der zusammenhängenden Graphen	224
10.2.2	Das erzeugende Funktional der Vertexfunktionen	227
10.3	Nichtstörungstheoretische Methoden	231
10.3.1	Die Idee der Näherungsmethoden, dargestellt am Beispiel eines polynomialen Driftterms	232
10.3.2	Die Gaußsche Näherung	233
10.3.3	Die Schwinger-Dyson-Näherung	235
10.3.4	Anwendungen der Gaußschen und der Schwinger-Dyson-Näherung	239
11	Analyse von Zeitreihen: Vorhersage, Filtration und Modellidentifikation	243
11.1	Bedingte Schätzwerte	244
11.1.1	Die Minimierung des quadratischen Fehlers	244
11.1.2	Der lineare Ansatz für die Schätzfunktion	245
11.1.3	Beispiele	248
11.2	Filter	251
11.3	Vorhersagen, ARMA-Prozesse	254
11.3.1	Der lineare Ansatz für ein Vorhersage-Modell	254
11.3.2	Kausale und invertierbare ARMA-Prozesse	255

11.3.3	Autokovarianzfunktionen und Spektraldichten von ARMA-Prozessen...	258
11.3.4	Der Innovationsalgorithmus	261
11.3.5	ARIMA- und SARIMA-Prozesse	265
11.3.6	Modelle mit Transfer- oder Gedächtnisfunktionen	266
11.4	Das Kalman-Filter	267
11.4.1	Die Idee des Kalman-Filters	267
11.4.2	Beispiel	270
11.4.3	Beweis des Algorithmus	271
11.4.4	Das erweiterte Kalman-Filter	273
11.5	Schätzungen der Kovarianzfunktion und der Spektraldichte bei gegebener Zeitreihe	274
11.5.1	Schätzfunktionen für die Autokovarianzfunktion $C(k)$ und die Autokorrelationsfunktion	274
11.5.2	Die Schnelle Fourier-Transformation (FFT)	275
11.5.3	Schätzung der Spektraldichte einer Zeitreihe durch Fourier-Transformation der Zeitreihe	277
11.6	Schätzungen der Parameter für ARMA-Prozesse und Transfermodelle..	281
11.6.1	Schätzungen der Yule-Walker-Parameter für einen reinen $AR(p)$ -Prozeß	282
11.6.2	Schätzung der Parameter eines MA-Prozesses mit Hilfe des Innovationsalgorithmus	286
11.6.3	Die Methode der kleinsten Quadrate für die Schätzung der Parameter eines allgemeinen ARMA- oder Transfermodells	288
11.6.4	Probleme in der Praxis und Beispiele	293
12	Punktprozesse	299
12.1	Verteilungs- und Kumulantenfunktionen	299
12.2	Das erzeugende Funktional für Momente	302
12.2.1	Beispiele für Momente	302
12.2.2	Das erzeugende Funktional	305
12.3	Wartezeiten	308
12.4	Gauß-Poisson-Prozesse	310
12.5	Erneuerungsprozesse	312
Tafeln		317
Referenzen und weiterführende Literatur		327
Register		333