

**Bernd Girod, Rudolf Rabenstein,
Alexander Stenger**

Einführung in die Systemtheorie

Signale und Systeme in der Elektrotechnik und Informationstechnik

3., korrigierte Auflage

Mit 388 Abbildungen und 113 Beispielen
sowie 200 Übungsaufgaben mit Lösungen



B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Signale	1
1.2	Systeme	5
1.2.1	Was ist ein System?	5
1.2.2	Der Anspruch der Systemtheorie	6
1.2.3	Lineare, zeitinvariante Systeme	7
1.2.3.1	Linearität eines Systems	7
1.2.3.2	Zeitinvarianz eines Systems	9
1.2.3.3	LTI-Systeme	9
1.2.4	Beispiele für Systeme	10
1.2.4.1	Elektrische Netzwerke	10
1.2.4.2	Weitere Beispiele für Systeme	10
1.2.5	Einteilung von Systemen	12
1.3	Übersicht über dieses Buch	13
1.4	Aufgaben	14
2	Beschreibung kontinuierlicher LTI-Systeme im Zeitbereich	17
2.1	Differentialgleichungen	17
2.1.1	Systemanalyse	17
2.1.2	Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	18
2.2	Blockdiagramme	19
2.2.1	Direktform I	20
2.2.2	Direktform II	20
2.2.3	Direktform III	24
2.2.4	Warum realisiert man LTI-Systeme nicht mit Differenzierern?	26
2.2.5	Elektrische Realisierung eines Integrierers mit einem Operationsverstärker	27
2.3	Zustandsraumbeschreibung von LTI-Systemen	29
2.3.1	Beispiel zur Zustandsraumbeschreibung	29
2.3.2	Allgemeine Form der Zustandsraumbeschreibung	30
2.4	Differentialgleichung, Blockdiagramm und Zustandsraumbeschreibung	31
2.5	Äquivalente Zustandsraumdarstellungen	33
2.6	Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit	35

2.7	Zusammenfassung	37
2.8	Aufgaben	40
3	Beschreibung von LTI-Systemen im Frequenzbereich	43
3.1	Komplexe Frequenzen	44
3.1.1	Was ist eine komplexe Frequenz?	44
3.1.2	Komplexe Frequenz: Beispielsignale	44
3.1.3	Die komplexe Frequenz-Ebene	45
3.2	Eigenfunktionen	46
3.2.1	Was sind Eigenfunktionen?	46
3.2.2	Eigenfunktionen von LTI-Systemen	48
3.2.3	Beispiel: RLC-Netzwerk	49
3.2.4	Impedanz	51
3.2.5	Normierung	52
3.3	Aufgaben	56
4	Laplace-Transformation	58
4.1	Verallgemeinerung des Eigenfunktionsansatzes	58
4.2	Definition der Laplace-Transformation	58
4.3	Einseitige und zweiseitige Laplace-Transformation	60
4.4	Beispiele zur Laplace-Transformation	61
4.5	Konvergenzbereich der Laplace-Transformation	64
4.5.1	Uneigentliche Integrale	65
4.5.2	Singularitäten	65
4.5.3	Eigenschaften des Konvergenzbereichs	66
4.6	Existenz und Eindeutigkeit der Laplace-Transformierten	68
4.6.1	Existenz der Laplace-Transformierten	68
4.6.2	Eindeutigkeit der inversen Laplace-Transformation	69
4.7	Eigenschaften und Sätze der Laplace-Transformation	72
4.7.1	Linearität der Laplace-Transformation	72
4.7.2	Verschiebung im Zeitbereich oder Frequenzbereich	73
4.7.3	Skalierung der Zeitachse oder der Frequenzebene	73
4.7.4	Differentiation und Integration im Zeitbereich	73
4.7.5	Differentiationssatz und Integrationssatz für die einseitige Laplace-Transformation	74
4.7.6	Differentiationssatz für stückweise glatte Signale	76
4.7.7	Differentiation im Frequenzbereich	78
4.7.8	Tabelle der wichtigsten Laplace-Transformierten	79
4.8	Aufgaben	79
5	Komplexe Funktionentheorie und inverse Laplace-Transformation	82
5.1	Wegintegral in der komplexen Ebene	82
5.2	Hauptsatz der Funktionentheorie	83
5.3	Ringintegrale um Singularitäten	84
5.4	Integralformel von Cauchy	86

5.4.1	Residuenberechnung	87
5.4.2	Integration parallel zur imaginären Achse	88
5.4.3	Bedeutung der Integralformel von Cauchy	90
5.5	Inverse Laplace-Transformation	90
5.5.1	Inverse einseitige Laplace-Transformation	90
5.5.2	Inverse zweiseitige Laplace-Transformation	91
5.5.3	Integrationsweg für die inverse Laplace-Transformation	92
5.5.4	Berechnung der inversen Laplace-Transformation mit dem Residuensatz	93
5.5.5	Praktische Berechnung der inversen Laplace-Transformation	96
5.6	Aufgaben	98
6	Analyse zeitkontinuierlicher LTI-Systeme mit der Laplace-Transformation	100
6.1	Systemreaktion auf zweiseitige Eingangssignale	100
6.2	Berechnung der Systemfunktion	102
6.3	Pole und Nullstellen der Systemfunktion	104
6.4	Berechnung der Systemfunktion aus Differentialgleichungen	107
6.5	Zusammenfassendes Beispiel	108
6.6	Kombination von einfachen LTI-Systemen	109
6.6.1	Reihenschaltung	109
6.6.2	Parallelschaltung	111
6.6.3	Rückkopplung	111
6.7	Kombination von LTI-Systemen mit mehreren Ein- und Ausgängen	112
6.7.1	Reihenschaltung	113
6.7.2	Parallelschaltung	114
6.7.3	Rückkopplung	114
6.8	Analyse von Zustandsraumbeschreibungen	116
6.9	Aufgaben	117
7	Lösung von Anfangswertproblemen mit der Laplace-Transformation	119
7.1	Systeme erster Ordnung	119
7.1.1	Klassische Lösung von Anfangswertproblemen	120
7.1.2	Externer und interner Anteil der Lösung	121
7.1.3	Anfangswert und Anfangszustand	123
7.1.4	Beispiel: Anfangswertproblem mit harmonischer Erregung	126
7.1.5	Zusammenfassung	128
7.2	Systeme zweiter Ordnung	129
7.3	Systeme höherer Ordnung	130
7.3.1	Lösung der Zustandsraumdifferentialgleichung	131
7.3.2	Berechnung des Anfangszustands aus den Anfangswerten	135
7.3.3	Berechnung des internen Anteils im Zeitbereich	137
7.4	Bewertung der Verfahren zur Lösung von Anfangswertproblemen	142
7.5	Linearität von Systemen mit Anfangszustand	142
7.6	Aufgaben	143

8	Faltung und Impulsantwort	146
8.1	Motivation	146
8.2	Zeitverhalten eines RC-Netzwerks	147
8.2.1	Systemfunktion	147
8.2.2	Reaktion auf einen Rechteckimpuls	148
8.2.3	Reaktion auf sehr kurze Rechteckimpulse	149
8.3	Der Delta-Impuls	150
8.3.1	Einführung	150
8.3.2	Ausblendeigenschaft	151
8.3.3	Impulsantwort	152
8.3.4	Rechenregeln für Delta-Impulse	153
8.3.4.1	Linearkombination von Delta-Impulsen	153
8.3.4.2	Skalierung der Zeitachse	153
8.3.4.3	Multiplikation mit einer stetigen Funktion	154
8.3.4.4	Derivation	155
8.3.4.5	Integration	156
8.3.5	Anwendung von Delta-Impulsen	157
8.4	Faltung	160
8.4.1	Systembeschreibung durch Impulsantwort	160
8.4.2	Impulsantwort und Systemfunktion	161
8.4.3	Berechnung des Faltungsintegrals	164
8.4.4	Impulsantworten spezieller Systeme	165
8.4.4.1	Integrierer	166
8.4.4.2	Differenzierer	167
8.4.4.3	Verzögerungsglieder	168
8.4.4.4	Bausteine der Regelungstechnik	170
8.4.5	Kombination einfacher LTI-Systeme	172
8.4.6	Faltung durch Hinschauen	173
8.5	Anwendungen	178
8.5.1	Suchfilter (Matched Filter)	178
8.5.2	Entfaltung	181
8.6	Aufgaben	182
9	Fourier-Transformation	185
9.1	Rückblick auf die Laplace-Transformation	185
9.2	Definition der Fourier-Transformation	186
9.2.1	Hintransformation	186
9.2.2	Existenz der Fourier-Transformation	187
9.3	Unterschiede zwischen Fourier- und Laplace-Transformation	188
9.4	Beispiele zur Fourier-Transformation	190
9.4.1	Fourier-Transformierte des Delta-Impulses	190
9.4.2	Fourier-Transformierte der Rechteckfunktion	191
9.4.3	Fourier-Transformierte einer komplexen Exponentialfunktion	195
9.4.4	Fourier-Transformierte von $\frac{1}{t}$	197
9.5	Symmetrien der Fourier-Transformation	198

9.5.1	Gerade und ungerade Funktionen	199
9.5.2	Konjugierte Symmetrie	200
9.5.3	Symmetriebeziehungen für reellwertige Zeitsignale	200
9.5.4	Symmetriebeziehungen für imaginäre Zeitsignale	202
9.5.5	Symmetriebeziehungen für komplexwertige Signale	202
9.6	Inverse Fourier-Transformation	203
9.7	Sätze zur Fourier-Transformation	204
9.7.1	Linearität der Fourier-Transformation	204
9.7.2	Ähnlichkeitssatz	205
9.7.3	Dualität	205
9.7.4	Faltungssatz der Fourier-Transformation	209
9.7.5	Multiplikationssatz	211
9.7.6	Verschiebungssatz und Modulationssatz	213
9.7.7	Differentiationssätze	215
9.7.8	Integrierungssatz	216
9.8	Parsevalsches Theorem	217
9.9	Korrelation deterministischer Signale	219
9.9.1	Definition	219
9.9.2	Eigenschaften	220
9.9.2.1	Zusammenhang mit der Faltung	220
9.9.2.2	Symmetrie	221
9.9.2.3	Kommutativität	221
9.9.2.4	Fourier-Transformierte von Korrelationsfunktionen	221
9.10	Zeit-Bandbreite-Produkt	223
9.10.1	Flächengleiches Rechteck	223
9.10.2	Toleranzschemata	225
9.10.3	Momente zweiter Ordnung	226
9.10.4	Zusammenfassung	227
9.11	Aufgaben	228
10	Bode-Diagramme	231
10.1	Einführung	231
10.2	Beiträge einzelner reeller Pole und Nullstellen	232
10.3	Bode-Diagramm für mehrere reelle Pole und Nullstellen	235
10.4	Regeln für Bode-Diagramme	237
10.4.1	Betragsfrequenzgang	238
10.4.2	Phasenverlauf	238
10.5	Komplexe Pol- und Nullstellenpaare	239
10.6	Aufgaben	244
11	Abtastung und periodische Signale	249
11.1	Einleitung	249
11.2	Delta-Impulskamm und periodische Funktionen	250
11.2.1	Delta-Impulskamm und seine Fourier-Transformierte	250
11.2.2	Fourier-Transformierte periodischer Signale	252

11.2.3	Faltung eines periodischen und eines aperiodischen Signals	254
11.2.4	Periodische Faltung	255
11.3	Abtastung	257
11.3.1	Ideale Abtastung	257
11.3.2	Abtasttheorem	257
11.3.3	Abtasttheorem für komplexwertige Bandpaß-Signale	262
11.3.4	Abtasttheorem für reellwertige Bandpaß-Signale	264
11.3.5	Nichtideale Abtastung	267
11.3.6	Nichtideale Rekonstruktion	270
11.3.7	Abtastung im Frequenzbereich	272
11.4	Aufgaben	274
12	Diskrete Signale und ihr Spektrum	281
12.1	Diskrete Signale	281
12.2	Einfache Zahlenfolgen	282
12.2.1	Diskreter Einheitsimpuls	283
12.2.2	Diskreter Einheitsprung	284
12.2.3	Exponentialfolgen	284
12.3	Fourier-Transformierte einer Folge	286
12.3.1	Definition der \mathcal{F}_* -Transformation	286
12.3.2	Inverse \mathcal{F}_* -Transformation	287
12.3.3	Korrespondenzen der \mathcal{F}_* -Transformation	287
12.3.3.1	\mathcal{F}_* -Transformierte des diskreten Einheitsimpulses	287
12.3.3.2	\mathcal{F}_* -Transformierte der ungedämpften komplexen Exponentialfolge	288
12.3.3.3	\mathcal{F}_* -Transformierte des diskreten Einheitsprungs	289
12.3.3.4	\mathcal{F}_* -Transformierte einseitiger Exponentialfolgen	290
12.3.3.5	\mathcal{F}_* -Transformation einer Rechteckfolge	290
12.4	Abtastung kontinuierlicher Signale	291
12.5	Sätze der \mathcal{F}_* -Transformation	293
12.5.1	Linearität	293
12.5.2	Verschiebungs- und Modulationssatz	293
12.5.3	Faltungssatz der \mathcal{F}_* -Transformation	294
12.5.4	Multiplikationssatz	294
12.5.5	Satz von Parseval	295
12.5.6	Symmetrien der Fourier-Transformation diskreter Signale	295
12.6	Aufgaben	296
13	z-Transformation	299
13.1	Definition und Beispiele	299
13.1.1	Definition der zweiseitigen z -Transformation	299
13.1.2	Beispiele zur z -Transformation	300
13.1.3	Anschauliche Deutung der z -Ebene	303
13.2	Konvergenzbereich der z -Transformation	304
13.3	Beziehungen zu anderen Transformationen	305

13.3.1	z -Transformation und Fourier-Transformation von Folgen	305
13.3.2	z -Transformation und Laplace-Transformation	307
13.4	Sätze der z -Transformation	309
13.5	Inverse z -Transformation	311
13.6	Pol-Nullstellen-Diagramm in der z -Ebene	314
13.7	Aufgaben	316
14	Zeitdiskrete LTI-Systeme	320
14.1	Einführung	320
14.2	Linearität und Zeitinvarianz	320
14.3	Lineare Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten	321
14.3.1	Differenzgleichungen und Differentialgleichungen	321
14.3.2	Lösung von linearen Differenzgleichungen	322
14.3.2.1	Numerische Lösung	322
14.3.2.2	Analytische Lösung	322
14.4	Eigenfolgen und Systemfunktion diskreter LTI-Systeme	322
14.4.1	Eigenfolgen	322
14.4.2	Systemfunktion	324
14.4.3	Berechnung der Systemfunktion aus der Differenzgleichung	325
14.5	Beschreibung durch Blockdiagramme und im Zustandsraum	326
14.5.1	Direktform I	327
14.5.2	Direktform II	327
14.5.3	Zustandsraumbeschreibung diskreter LTI-Systeme	328
14.6	Diskrete Faltung und Impulsantwort	331
14.6.1	Berechnung der Systemreaktion durch diskrete Faltung	332
14.6.2	Faltungssatz der z -Transformation	333
14.6.3	Systeme mit endlich und unendlich langer Impulsantwort	334
14.6.4	Berechnung der diskreten Faltung	336
14.7	Aufgaben	340
15	Kausalität und Hilbert-Transformation	346
15.1	Kausale Systeme	346
15.1.1	Allgemeine Systeme	347
15.1.2	Lineare Systeme	347
15.1.3	LTI-Systeme	348
15.2	Kausale Signale	349
15.2.1	Zeitbereich	349
15.2.2	Spektren kausaler Signale	350
15.2.2.1	Kontinuierliche Signale	350
15.2.2.2	Diskrete Signale	351
15.3	Analytisches Signal	353
15.4	Aufgaben	356

16 Stabilität und rückgekoppelte Systeme	359
16.1 BIBO, Impulsantwort und Frequenzgang	359
16.1.1 Kontinuierliche LTI-Systeme	360
16.1.2 Diskrete Systeme	361
16.1.3 Beispiele	361
16.2 Kausale stabile LTI-Systeme	363
16.2.1 Allgemeine Eigenschaften	364
16.2.1.1 Kontinuierliche Systeme	364
16.2.1.2 Diskrete Systeme	364
16.2.2 LTI-Systeme mit gebrochen rationaler Übertragungsfunktion	365
16.2.2.1 Kontinuierliche Systeme	365
16.2.2.2 Diskrete Systeme	365
16.2.3 Stabilitätskriterien	366
16.2.3.1 Kontinuierliche Systeme	366
16.2.3.2 Diskrete Systeme	368
16.3 Rückgekoppelte Systeme	370
16.3.1 Invertierung eines Systems durch Rückkopplung	371
16.3.2 Glättung des Frequenzgangs durch Gegenkopplung	371
16.3.3 Stabilisierung eines Systems durch Rückkopplung	372
16.3.4 Regelkreise	375
16.4 Aufgaben	376
17 Beschreibung von Zufallssignalen	379
17.1 Einleitung	379
17.1.1 Was sind Zufallssignale?	380
17.1.2 Wie beschreibt man Zufallssignale?	380
17.2 Erwartungswerte	381
17.2.1 Erwartungswert als Scharmittelwert	381
17.2.2 Erwartungswerte erster Ordnung	383
17.2.3 Rechnen mit Erwartungswerten	385
17.2.4 Erwartungswerte zweiter Ordnung	386
17.3 Stationäre Zufallsprozesse	387
17.3.1 Definition	387
17.3.2 Ergodische Zufallsprozesse	390
17.4 Korrelationsfunktionen	391
17.4.1 Korrelationsfunktionen reeller Signale	392
17.4.1.1 Autokorrelationsfunktion	392
17.4.1.2 Autokovarianzfunktion	395
17.4.1.3 Kreuzkorrelationsfunktion	396
17.4.1.4 Kreuzkovarianzfunktion	398
17.4.2 Korrelationsfunktionen komplexwertiger Signale	398
17.4.2.1 Kreuzkorrelationsfunktion	398
17.4.2.2 Autokorrelationsfunktion	399
17.4.2.3 Kreuzkovarianz- und Autokovarianzfunktion	400
17.5 Leistungsdichtespektren	400

17.5.1	Definition	401
17.5.2	Leistungsdichtespektrum und quadratischer Mittelwert	402
17.5.3	Symmetrieeigenschaften des Leistungsdichtespektrums	403
17.5.4	Weißes Rauschen	404
17.6	Beschreibung diskreter Zufallssignale	405
17.7	Aufgaben	407
18	Zufallssignale und LTI-Systeme	411
18.1	Verknüpfungen von Zufallssignalen	411
18.1.1	Multiplikation von Zufallssignalen mit einem Faktor	411
18.1.2	Addition von Zufallssignalen	412
18.1.2.1	Autokorrelationsfunktion und Leistungsdichtespektrum	413
18.1.2.2	Kreuzkorrelationsfunktion und Kreuzleistungsdichtespektrum	414
18.2	Reaktion von LTI-Systemen auf Zufallssignale	415
18.2.1	Stationarität und Ergodizität	415
18.2.2	Linearer Mittelwert am Ausgang eines LTI-Systems	416
18.2.3	Autokorrelationsfunktion am Ausgang eines LTI-Systems	417
18.2.4	Kreuzkorrelationsfunktion zwischen Eingang und Ausgang eines LTI-Systems	419
18.2.5	Leistungsdichtespektrum und LTI-System	421
18.2.6	Deutung des Leistungsdichtespektrums	423
18.2.7	Messung des Übertragungsverhaltens eines LTI-Systems	424
18.3	Signalschätzung durch Wiener-Filter	426
18.3.1	Herleitung der Übertragungsfunktion des Wiener-Filters	427
18.3.1.1	Lineare Verzerrungen und additives Rauschen	429
18.3.1.2	Ideale Übertragung und additives Rauschen	429
18.3.1.3	Lineare Verzerrungen ohne Rauschen	430
18.4	Aufgaben	431
A	Lösungen der Aufgaben	437
B	Korrespondenzen-Tabellen	520
B.1	Korrespondenzen der zweiseitigen Laplace-Transformation	520
B.2	Sätze der zweiseitigen Laplace-Transformation	521
B.3	Korrespondenzen der Fourier-Transformation	522
B.4	Sätze der Fourier-Transformation	523
B.5	Korrespondenzen der zweiseitigen z -Transformation	524
B.6	Sätze der zweiseitigen z -Transformation	525
B.7	Korrespondenzen der Fourier-Transformation von Folgen	526
B.8	Sätze der Fourier-Transformation von Folgen	527
	Literaturverzeichnis	528
	Index	530