

Steffen Hahn

Bestand und Änderung

Grundlegung einer vorstellungsorientierten

Differentialrechnung

Inhalt

Vorwort	1
1 Einleitung	3
2 Theoretische Grundlagen	7
2.1 Normative Grundlagen	7
2.1.1 Klassische mathematikdidaktische Positionen zur Bildungsdiskussion	7
2.1.2 Kommunikationsfähigkeit mit Expertinnen und Experten als Orientierungsprinzip für Höhere Allgemeinbildung in Mathematik	9
2.1.3 Vorstellungen und Verständnisse	10
2.2 Deskriptive Grundlagen	11
2.2.1 Lerntheoretischer Hintergrund: Wie funktioniert Lernen?	11
2.2.2 Bedeutung von vorunterrichtlichen Vorstellungen	13
2.3 Das Modell der Didaktischen Rekonstruktion	14
2.4 Darstellung der Vorgehensweise	17
2.4.1 Fachliche Klärung	17
2.4.2 Erfassen von Lernendenperspektiven	17
2.4.3 Didaktische Strukturierung	18
2.4.4 Erfassen von Lernendenperspektiven	18
2.4.5 Fachliche Klärung	18
2.4.6 Erfassen von Lernendenperspektiven	18
3 Diskussionsstand der deutschsprachigen Didaktik der Analysis	19
3.1 Gängige Ansätze zur Didaktischen Strukturierung: Antworten auf das Problem der Kalkülorientierung	19
3.1.1 Betonung von Grundvorstellungen	20
3.1.2 Betonung der geometrischen Veranschaulichung	20
3.1.3 Echte Kurven in der Ebene statt nur Funktionsgraphen mit eindimensionalem Wertebereich	22
3.1.4 Realitätsbezogene Probleme als sinnstiftende Anwendung der Kurvendiskussion	23
3.1.5 Computereinsatz im Mathematikunterricht	24
3.2 Empirische Forschungsarbeiten zum Erfassen der Lernendenperspektive in der Analysis	25
4 Fachliche Klärung: Bestand und Änderung als zentrale Begriffe der Differentialrechnung	27
4.1 Einleitung: Was ist der Kern des Themas?	27
4.2 Die Ableitung	28
4.3 Grundvorstellungen und Grundverständnisse für das Thema	32
4.4 Der Grenzwertbegriff als zentrales mathematisches Konzept	38
4.5 Das Modell „Ebenen- und Aspektwechsel“	40
4.6 Ansatz „qualitative Funktionen“	44

5	Erfassen von Lernendenperspektiven	46
5.1	Untersuchungsdesign und Analysemethoden zum Erfassen von vorunterrichtlichen Lernendenvorstellungen	46
5.1.1	Interviewdesign	46
5.1.2	Beschreibung der Interviewaufgaben	51
5.1.2.1	Interviewaufgabe „Produktlebenszyklus“	52
5.1.2.2	Interviewaufgabe „Neuverschuldung gesunken“	55
5.1.3	Datenkorpus	57
5.1.4	Auswertung der Interviews	58
5.2	Genauigkeitsstufe 1 – Feinanalyse des Interviews mit Martina und Henner (Interview Nr. 30)	62
5.2.1	Forschungsfragen	62
5.2.2	Analyse	62
5.2.3	Kurze Zusammenfassung der Ergebnisse der Analyse des Interviews Nr. 30	91
5.3	Genauigkeitsstufe 2 – Mittelfeine Analyse der Interviews Nr. 03, 05, 15, 18, 19, 23, 28	93
5.3.1	Forschungsfragen	93
5.3.2	Interview Nr. 03 – Bärbel und Kosima	93
5.3.3	Interview Nr. 05 – Clara und Ebba	95
5.3.4	Interview Nr. 15 – Kerstin und Horst	99
5.3.5	Interview Nr. 18 – Andrea und Hannelore	103
5.3.6	Interview Nr. 19 – Hilma und Karsten	108
5.3.7	Interview Nr. 23 – Anja und Klaus	110
5.3.8	Interview Nr. 28 – Erika und Frauke	115
5.4	Genauigkeitsstufe 3 – Überblicksanalyse der Interviews	119
5.4.1	Konzept „negative Zunahme = Abnahme“	119
5.4.2	Wie misst man Zunahmen? Prozentual oder absolut?	121
5.4.3	SchülerInnenausdrücke für die tägliche Änderung	121
5.4.4	Ebenenverwechslungen	123
5.4.5	Beschreibung des lokalen Maximums (im Produktlebenszyklus)	125
5.4.6	Beschreibung des Wendepunkts (im Produktlebenszyklus)	126
5.5	Zusammenfassung	127
6	Erfassen von Lernendenperspektiven während einer Forschungsunterrichtsreihe	129
6.1	Mit der Unterrichtsreihe verfolgte Ziele	130
6.1.1	Von den SchülerInnen zu erreichende Lernziele	130
6.1.2	Forschungsziele	131
6.2	Lernendenperspektiven	132
6.2.1	Ebenen- und Aspektverwechslung	132
6.2.2	Eine Abnahme lässt sich durch eine negative Zunahme beschreiben	137
6.2.3	Wie sind Zu- und Abnahme zu verstehen?	138
6.2.4	Das Problem der Momentangeschwindigkeit und die „isolierende Sichtweise“	140
6.2.5	Die Tangente als schwieriger Begriff	148
6.2.6	Handwerkliche Probleme	149
6.2.7	Wunsch nach Rezepten	150
6.2.8	„Wendepunkt“ als problematischer Ausdruck	151
6.3	Fazit	152

7	Einblicke in den vertieften Prozess der Didaktischen Rekonstruktion anhand zweier Beispiele	154
7.1	Wie misst man Zunahmen, absolut oder prozentual?	155
7.1.1	Fachliche Klärung	155
7.1.2	Erfassen von Lernendenperspektiven	155
7.1.3	Fachliche Klärung	156
7.1.4	Didaktische Strukturierung	167
7.1.5	Erfassen von Lernendenperspektiven	169
7.1.6	Fachliche Klärung	170
7.1.7	Didaktische Strukturierung: Vorschläge für einen erneuten Unterricht	173
7.1.8	Zusammenfassender Rückblick	175
7.2	Gegensinnig orientierte Kovariation auf benachbarten Ableitungsebenen	175
7.2.1	Erfassen von Lernendenperspektiven	177
7.2.2	Fachliche Klärung	179
7.2.2.1	Mathematische Absicherung des strukturellen Kerns	182
7.2.2.2	Übertragung auf den Alltag	208
7.2.2.3	Grundvorstellungen zu lokalen Extrem- und Wendepunkten	217
7.2.3	Didaktische Strukturierung	218
7.2.4	Erfassen von Lernendenperspektiven	219
7.2.5	Didaktische Strukturierung	225
7.2.6	Zusammenfassung	229
8	Schlussbemerkungen	231
8.1	Inhaltlicher Rückblick – Zentrale Punkte der Arbeit	231
8.2	Einbettung in die mathematikdidaktische Diskussion	232
8.3	Methodischer Rückblick – Stärken und Herausforderungen des Forschungsmodells der Didaktischen Rekonstruktion	232
8.4	Forschungsfragen aus der eigenen Arbeit	234
9	Literaturverzeichnis	235
9.1	Printmedien	235
9.2	Computerprogramme	241