

Vorlesungen über Mathematik

**Rudolf Taschner**

**LEHRGANG  
DER KONSTRUKTIVEN  
MATHEMATIK**

**2. Teil:  
DIFFERENTIALRECHNUNG**

Wien 1992

MANZ Verlags- und Universitätsbuchhandlung

# INHALTSVERZEICHNIS

<b>1. VARIABLE UND DIFFERENTIAL</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1. Variable und Zustände . . . . .	1
1.1.1. Mathematische Analyse der Wirklichkeit . . . . .	1
1.1.2. Konstante . . . . .	3
1.1.3. Abhängige Variable . . . . .	4
1.1.4. Diskrete und kontinuierliche Variable . . . . .	5
1.1.5. Definition eines mathematischen Systems . . . . .	6
1.2. Differentiale . . . . .	7
1.2.1. Zustandsänderungen . . . . .	7
1.2.2. Änderung und Differential . . . . .	8
1.2.3. Definitionen zum Differential . . . . .	10
1.2.4. Differentialquotient und partielle Ableitungen . . . . .	12
1.3. Differenzierbare Funktionen in einer Veränderlichen . . . . .	14
1.3.1. Modell von Systemen mit einem Freiheitsgrad . . . . .	14
1.3.2. Modell von Systemen mit mehreren Freiheitsgraden . . . . .	16
1.3.3. Differenzierbare Funktionen . . . . .	18
1.3.4. Differentiation einer Abbildung . . . . .	19
1.3.5. Elementare Differentiationen . . . . .	20
1.3.6. Differentiationsregeln . . . . .	21
1.3.7. Deutung der Kettenregel . . . . .	23
1.3.8. Weitere Differentiationsregeln . . . . .	23
1.3.9. Differentiation der Exponentialfunktion . . . . .	25
1.3.10. Differentiation der Winkelfunktionen . . . . .	25
1.3.11. Geometrische Bedeutung der Differentiale . . . . .	27
1.4. Differenzierbare Funktionen in mehreren Veränderlichen . . . . .	28
1.4.1. Differenzierbare Funktionen . . . . .	28
1.4.2. Differentiation einer Abbildung . . . . .	30
1.4.3. Die Kettenregel . . . . .	31
1.4.4. Verallgemeinerung auf mehr als zwei Variable . . . . .	32

1.4.5. Jacobische Matrizen . . . . .	33
1.4.6. Ein Beispiel . . . . .	35
1.5. Analysis differenzierbarer Funktionen . . . . .	37
1.5.1. Das Vorzeichen der Ableitungsfunktion . . . . .	37
1.5.2. Stationäre Stellen . . . . .	38
1.5.3. Gleichmäßige Differenzierbarkeit . . . . .	39
1.5.4. Der Satz von Rolle . . . . .	41
1.5.5. Der Mittelwertsatz . . . . .	43
1.5.6. Der Satz vom endlichen Zuwachs . . . . .	44
1.5.7. Das Paradoxon des fliegenden Pfeils . . . . .	45
1.5.8. Mehrdimensionale Verallgemeinerung . . . . .	45
1.5.9. Konvexe Mengen . . . . .	46
1.5.10. Gebiete . . . . .	47
1.5.11. Grenzwertberechnungen . . . . .	48
1.5.12. Beispiele . . . . .	51
1.6. Höhere Ableitungen und Differentialoperatoren . . . . .	53
1.6.1. Ableitungen zweiter Ordnung . . . . .	53
1.6.2. Gemischte partielle Ableitungen . . . . .	54
1.6.3. Ableitungen höherer Ordnung im Eindimensionalen . . . . .	56
1.6.4. Die Taylorsche Darstellung eines Polynoms . . . . .	56
1.6.5. Ableitungsoperatoren . . . . .	57
1.6.6. Der Verschiebungsoperator . . . . .	58
1.6.7. Differentialoperatoren . . . . .	59
1.6.8. Homogene Funktionen . . . . .	60
1.7. Gleichungen in einer Variablen . . . . .	63
1.7.1. Das Newtonverfahren . . . . .	63
1.7.2. Das babylonische Wurzelziehen . . . . .	64
1.7.3. Die Fixpunktgleichung . . . . .	65
1.7.4. Der Fixpunktsatz . . . . .	66
1.7.5. Abstand und Vollständigkeit . . . . .	68
1.7.6. Konvergenz des Newtonverfahrens . . . . .	69
1.7.7. Konvergenz des babylonischen Wurzelziehens . . . . .	70
1.8. Gleichungen in mehreren Variablen . . . . .	71
1.8.1. Lösungskeime und Lösungszweige . . . . .	71
1.8.2. Sterile und fertile Keime . . . . .	72
1.8.3. Rückführung auf eine Fixpunktgleichung . . . . .	73
1.8.4. Existenz des Lösungszweiges . . . . .	75
1.8.5. Stetigkeit des Lösungszweiges . . . . .	75
1.8.6. Differenzierbarkeit des Lösungszweiges . . . . .	76
1.8.7. Der Hauptsatz über eine Gleichung in mehreren Variablen . . . . .	77
1.9. Gleichungssysteme in mehreren Variablen . . . . .	79
1.9.1. Der Fall zweier Gleichungen . . . . .	79
1.9.2. Rückführung auf eine Gleichung . . . . .	80
1.9.3. Der Hauptsatz über zwei Gleichungen in mehreren Variablen . . . . .	81
1.9.4. Determinanten . . . . .	82
1.9.5. Multilinearität und Antisymmetrie . . . . .	83
1.9.6. Transposition . . . . .	85

1.9.7. Entwicklung nach Minoren . . . . .	85
1.9.8. Der Fall endlich vieler Gleichungen . . . . .	87
1.9.9. Rückführung auf eine Gleichung . . . . .	88
1.9.10. Der Hauptsatz über Gleichungssysteme in mehreren Variablen . . . . .	90
1.10. Abhängige und unabhängige Variable . . . . .	91
1.10.1. Voneinander abhängige Variable . . . . .	91
1.10.2. Der Rang eines Systems von Variablen . . . . .	92
1.10.3. Der Rangsatz . . . . .	95
1.10.4. Ein Beispiel . . . . .	97
1.11. Das geometrische Modell von Variablen und Zuständen . . . . .	99
1.11.1. Atlas eines mathematischen Systems . . . . .	99
1.11.2. Die stereographische Projektion . . . . .	101
1.11.3. Globale und lokale Variable . . . . .	104
1.11.4. Lokale Koordinaten . . . . .	105
1.11.5. Dimension eines mathematischen Systems . . . . .	107
1.11.6. Einbindung einer Karte in den Kugelatlas . . . . .	108
1.12. Beispiele und Ergänzungen . . . . .	109
1.12.1. Variable in der Physik . . . . .	109
1.12.2. Variable in der Elektrotechnik . . . . .	110
1.12.3. Variable in der Chemie . . . . .	110
1.12.4. Variable in der Ökonomie . . . . .	111
1.12.5. Fehlerrechnung . . . . .	111
1.12.6. Beispiele von Differentialen . . . . .	112
1.12.7. Differenzierbare unstetige Funktionen . . . . .	114
1.12.8. Stetigkeit, Differenzierbarkeit und stetige Differenzierbarkeit . . . . .	114
1.12.9. Schaubilder von Funktionen . . . . .	115
1.12.10. Monotonie und stationäre Stellen . . . . .	116
1.12.11. Geometrische Extremwertbeispiele . . . . .	118
1.12.12. Physikalische Extremwertbeispiele . . . . .	120
1.12.13. Ökonomische Extremwertbeispiele . . . . .	121
1.12.14. Die Regel von de l'Hospital . . . . .	123
1.12.15. Das Interpolationspolynom . . . . .	124
1.12.16. Höhere Ableitungen . . . . .	124
1.12.17. Das Taylorsche Polynom . . . . .	126
1.12.18. Homogene Funktionen . . . . .	127
1.12.19. Konvexe Funktionen . . . . .	128
1.12.20. Gleichungen in einer Unbekannten . . . . .	128
1.12.21. Gleichungen in mehreren Unbekannten . . . . .	129
1.12.22. Gleichungssysteme in mehreren Unbekannten . . . . .	130
1.12.23. Abhängige und unabhängige Variable . . . . .	130
1.12.24. Ein- und zweidimensionale mathematische Systeme . . . . .	131
1.12.25. Die affine Ebene und der affine Raum als mathematische Systeme . . . . .	132
<b>2. DIFFERENTIAL UND INTEGRAL . . . . .</b>	<b>134</b>
2.1. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung . . . . .	134
2.1.1. Differentiation eines Integrals . . . . .	134
2.1.2. Stammfunktionen . . . . .	135
2.1.3. Das unbestimmte Integral . . . . .	136

2.1.4. Das bestimmte Integral . . . . .	137
2.1.5. Integrationsregeln . . . . .	138
2.1.6. Weitere Beispiele . . . . .	140
2.2. Logarithmus und Hyperbelfunktionen . . . . .	142
2.2.1. Integraldefinition des Logarithmus . . . . .	142
2.2.2. Die Funktionalgleichung des Logarithmus . . . . .	143
2.2.3. Der natürliche Logarithmus . . . . .	145
2.2.4. Die Exponentialfunktion . . . . .	146
2.2.5. Gerade und ungerade Funktionen . . . . .	147
2.2.6. Die Hyperbelfunktionen . . . . .	148
2.2.7. Die Areafunktionen . . . . .	149
2.3. Arcustangens und Kreisfunktionen . . . . .	151
2.3.1. Integraldefinition des Arcustangens . . . . .	151
2.3.2. Eine fundamentale Arcustangensrelation . . . . .	152
2.3.3. Die Tangensfunktion . . . . .	153
2.3.4. Die unterschiedlichen Definitionen des Tangens . . . . .	154
2.3.5. Die Kreisfunktionen . . . . .	155
2.3.6. Die Arcusfunktionen . . . . .	157
2.4. Die Verallgemeinerung des Hauptsatzes von Leibniz . . . . .	158
2.4.1. Differentiation eines Parameterintegrals . . . . .	158
2.4.2. Das euler-poissonsche Integral . . . . .	160
2.4.3. Iterierte Integrale . . . . .	161
2.5. Zellen, Ketten und Differentialformen in der Ebene . . . . .	162
2.5.1. Zellen in der Ebene . . . . .	162
2.5.2. Integrale über Zellen . . . . .	163
2.5.3. Keilprodukt und Differentialformen . . . . .	164
2.5.4. Ketten in der Ebene . . . . .	166
2.5.5. Integrale über Ketten . . . . .	166
2.6. Ränder und Zyklen . . . . .	168
2.6.1. Der Rand einer Zelle . . . . .	168
2.6.2. Der Rand einer Kette . . . . .	169
2.6.3. Zyklen . . . . .	171
2.6.4. Integrale über Ränder . . . . .	172
2.7. Exakte und geschlossene Differentialformen . . . . .	174
2.7.1. Ein Beispiel . . . . .	174
2.7.2. Geschlossene Differentialformen . . . . .	175
2.7.3. Exakte Differentialformen . . . . .	178
2.7.4. Ein weiteres Beispiel . . . . .	179
2.7.5. Zusammenheften von Stammformen . . . . .	181
2.8. Kurven und Flächenintegrale . . . . .	183
2.8.1. Kurvenintegrale . . . . .	183
2.8.2. Der greensche Satz für Kurvenintegrale . . . . .	184
2.8.3. Flächenintegrale . . . . .	186
2.8.4. Der greensche Satz für Flächenintegrale . . . . .	187

2.8.5. Diffeomorphismen . . . . .	189
2.8.6. Die Invarianz des Kurvenintegrals . . . . .	190
2.8.7. Die Invarianz des Flächenintegrals . . . . .	192
2.8.8. Polarkoordinaten . . . . .	194
2.8.9. Das euler-poissonsche Integral . . . . .	196
2.8.10. Integrale über Normalbereiche . . . . .	197
2.9. Zellen und Ketten beliebiger Dimensionen . . . . .	199
2.9.1. Zellen . . . . .	199
2.9.2. Ketten . . . . .	201
2.9.3. Der Rand von Zellen und Ketten . . . . .	201
2.9.4. Geschlossene Ketten . . . . .	203
2.10. Differentialformen beliebiger Stufen . . . . .	204
2.10.1. Differentialformen . . . . .	204
2.10.2. Beispiele . . . . .	205
2.10.3. Das Keilprodukt . . . . .	206
2.10.4. Beispiele . . . . .	207
2.10.5. Das äußere Differential . . . . .	208
2.10.6. Beispiele . . . . .	209
2.10.7. Das Differential eines Differentials . . . . .	210
2.10.8. Exakte und geschlossene Differentialformen . . . . .	211
2.11. Integrale über Zellen und Ketten von Zellen . . . . .	214
2.11.1. Definition des Integrals . . . . .	214
2.11.2. Zwei Beispiele . . . . .	215
2.12. Bereichsintegrale . . . . .	218
2.12.1. Bereiche . . . . .	218
2.12.2. Integrale über Bereiche . . . . .	218
2.12.3. Diffeomorphismen . . . . .	220
2.12.4. Die Invarianz des Bereichsintegrals . . . . .	221
2.12.5. Die Forderung nach Orientierungstreue . . . . .	223
2.12.6. Normalbereiche . . . . .	224
2.12.7. Bereichsketten und Ränder . . . . .	226
2.12.8. Zylinderkoordinaten . . . . .	227
2.12.9. Kugelkoordinaten . . . . .	229
2.13. Beispiele und Ergänzungen . . . . .	232
2.13.1. Elementare Integrationen . . . . .	232
2.13.2. Integration rationaler Funktionen . . . . .	232
2.13.3. Integration algebraischer Funktionen . . . . .	235
2.13.4. Integration von Kreis- und Hyperbelfunktionen . . . . .	236
2.13.5. Eine Anwendung der Substitutionsregel . . . . .	237
2.13.6. Die landensche Substitution . . . . .	237
2.13.7. Die Irrationalität von $e$ und $\pi$ . . . . .	238
2.13.8. Der mittlere Binomialkoeffizient . . . . .	240
2.13.9. Grenzwertrelationen der elementaren Funktionen . . . . .	241
2.13.10. Funktionskurven und Ableitungen der elementaren Funktionen . . . . .	242
2.13.11. Differentiation von Parameterintegralen . . . . .	243
2.13.12. Differentiation eines uneigentlichen Integrals . . . . .	243
2.13.13. Ein Gegenbeispiel zur Vertauschungsregel iterierter Integrale . . . . .	244

2.13.14. Eindimensionale Zellen . . . . .	245
2.13.15. Zweidimensionale Zellen . . . . .	246
2.13.16. Kurvenintegrale . . . . .	246
2.13.17. Flächenintegrale . . . . .	247
2.13.18. Greenscher Satz der Ebene . . . . .	249
2.13.19. Exakte Differentialgleichungen . . . . .	250
2.13.20. Zerlegung der Eins . . . . .	250
2.13.21. Rechenregeln mit Differentialformen . . . . .	252
2.13.22. Unbestimmte Integration von Differentialformen . . . . .	254
2.13.23. Beispiele von Bereichsintegralen . . . . .	255

### 3. DIFFERENTIALGEOMETRIE . . . . . 257

#### 3.1. Das bewegliche Zweibein . . . . . 257

3.1.1. Variable Punkte und Vektoren . . . . .	257
3.1.2. Glatte Kurven . . . . .	258
3.1.3. Das frenetsche Zweibein . . . . .	260
3.1.4. Gerade und Kreis . . . . .	260
3.1.5. Die Ableitungsgleichungen . . . . .	262

#### 3.2. Geometrie ebener Kurven . . . . . 264

3.2.1. Die Bogenlänge . . . . .	264
3.2.2. Die Krümmung . . . . .	265
3.2.3. Schnitt, Berührung und Oskulation . . . . .	266
3.2.4. Länge eines Kurvenstücks . . . . .	267
3.2.5. Arcusfunktionen und Bogenmaß . . . . .	268
3.2.6. Evolute und Evolvente . . . . .	269
3.2.7. Das Flächenelement erster Stufe . . . . .	271
3.2.8. Das Flächenelement zweiter Stufe . . . . .	273
3.2.9. Sektorflächeninhalte . . . . .	273

#### 3.3. Parabel, Ellipse und Hyperbel . . . . . 275

3.3.1. Die Definition nach Apollonios . . . . .	275
3.3.2. Die Parabel . . . . .	278
3.3.3. Die Ellipse . . . . .	279
3.3.4. Die Hyperbel . . . . .	281
3.3.5. Asymptoten . . . . .	282
3.3.6. Areafunktionen und Flächeninhalt . . . . .	285

#### 3.4. Der endlichdimensionale euklidische Raum . . . . . 286

3.4.1. Endlichdimensionale Vektorräume . . . . .	286
3.4.2. Euklidische Vektorräume . . . . .	287
3.4.3. Die Struktur der metrischen Fundamentalmatrix . . . . .	289
3.4.4. Das Orthogonalisierungsverfahren . . . . .	291
3.4.5. Länge und Winkel . . . . .	293
3.4.6. Inhalt und Orientierung . . . . .	294
3.4.7. Der Darstellungssatz . . . . .	296
3.4.8. Normalvektoren . . . . .	297
3.4.9. Tripel- und Quadrupelprodukte . . . . .	298
3.4.10. Euklidische Punkträume . . . . .	299

#### 3.5. Ableitungsgleichungen und Ableitungskoeffizienten . . . . . 301

3.5.1. Bewegliche Koordinatensysteme . . . . .	301
3.5.2. Die Ableitungsgleichungen . . . . .	302
3.5.3. Die Integrabilitätsbedingungen . . . . .	303
3.5.4. Bewegliche cartesische Koordinatensysteme . . . . .	306
3.6. Geometrie von Raumkurven . . . . .	307
3.6.1. Das frenetsche Dreibein . . . . .	307
3.6.2. Die Bogenlänge . . . . .	308
3.6.3. Differentiationsregeln für Vektoren . . . . .	309
3.6.4. Die Krümmung . . . . .	310
3.6.5. Die Torsion . . . . .	311
3.6.6. Ein Beispiel . . . . .	312
3.7. Beispiele von Flächen im Raum . . . . .	314
3.7.1. Das gaußsche Dreibein . . . . .	314
3.7.2. Das darbouxsche Dreibein . . . . .	316
3.7.3. Die Ebene . . . . .	317
3.7.4. Der Zylinder . . . . .	319
3.7.5. Der Kegel . . . . .	321
3.7.6. Die Kugel . . . . .	322
3.7.7. Drehflächen . . . . .	324
3.7.8. Der Torus . . . . .	328
3.8. Die Gleichheit von Mannigfaltigkeiten: der äußere Aspekt . . . . .	329
3.8.1. Ein Beispiel . . . . .	329
3.8.2. Reguläre Matrizen . . . . .	330
3.8.3. Unimodulare Matrizen . . . . .	331
3.8.4. Orthogonale Matrizen . . . . .	332
3.8.5. Wechsel des Koordinatensystems . . . . .	333
3.8.6. Lagenwechsel . . . . .	334
3.8.7. Gleichsetzung von Mannigfaltigkeiten bei Lagenwechsel . . . . .	335
3.8.8. Beispiele . . . . .	336
3.9. Die Gleichheit von Mannigfaltigkeiten: der innere Aspekt . . . . .	338
3.9.1. Lokal gegebene Mannigfaltigkeiten . . . . .	338
3.9.2. Global gegebene Mannigfaltigkeiten . . . . .	340
3.9.3. Die stereographische Projektion . . . . .	340
3.9.4. Einbindung einer Karte in einen Atlas . . . . .	342
3.9.5. Hyperbeldarstellungen . . . . .	344
3.10. Die erste Fundamentalform . . . . .	346
3.10.1. Die Tangentialebene . . . . .	346
3.10.2. Die Fundamentalgrößen erster Art . . . . .	347
3.10.3. Beispiele . . . . .	349
3.10.4. Fundamentalgrößen und Kartenwechsel . . . . .	351
3.11. Oberfläche und Volumen . . . . .	352
3.11.1. Das Oberflächenelement . . . . .	352
3.11.2. Die Oberfläche . . . . .	353
3.11.3. Beispiele . . . . .	354
3.11.4. Das Volumenelement zweiter Stufe . . . . .	356

3.11.5. Pyramiden . . . . .	357
3.11.6. Das Volumselement dritter Stufe . . . . .	360
3.12. Geometrie von Flächenkurven: der äußere Aspekt . . . . .	361
3.12.1. Definition einer Flächenkurve . . . . .	361
3.12.2. Das darboux'sche Dreibein einer Flächenkurve . . . . .	362
3.12.3. Die geodätische Krümmung und die Normalkrümmung . . . . .	363
3.12.4. Kinematik eines klassischen Teilchens . . . . .	364
3.12.5. Die geodätische Torsion . . . . .	366
3.12.6. Ein Beispiel . . . . .	366
3.13. Die zweite Fundamentalform . . . . .	368
3.13.1. Normalkrümmung und Tangentenrichtung . . . . .	368
3.13.2. Die Fundamentalgrößen zweiter Art . . . . .	369
3.13.3. Beispiele . . . . .	370
3.13.4. Klassifikation von Flächenpunkten . . . . .	371
3.14. Krümmungen einer Fläche . . . . .	373
3.14.1. Normalkrümmung und Tangentenrichtung . . . . .	373
3.14.2. Geodätische Torsion und Tangentenrichtung . . . . .	374
3.14.3. Die Hauptkrümmungsrichtungen . . . . .	376
3.14.4. Die mittlere Krümmung . . . . .	377
3.14.5. Die gauß'sche Krümmung . . . . .	377
3.14.6. Fundamentalgrößen und Krümmungen . . . . .	379
3.14.7. Beispiele . . . . .	381
3.15. Geometrie von Flächenkurven: der innere Aspekt . . . . .	382
3.15.1. Bogenlänge und erste Fundamentalform . . . . .	382
3.15.2. Die Karte als Fläche . . . . .	383
3.15.3. Der Verlust der affinen Struktur . . . . .	384
3.15.4. Das Tangentialebenenbündel . . . . .	385
3.15.5. Länge und Winkel . . . . .	387
3.15.6. Erzeugende und Schraubenlinie auf dem Zylinder . . . . .	388
3.15.7. Meridian und Loxodrome auf der Kugel . . . . .	389
3.15.8. Innere Geometrie auf Flächen . . . . .	391
3.16. Die Parallelverschiebung . . . . .	393
3.16.1. Das Theorema egregium . . . . .	393
3.16.2. Parallelverschiebung und Krümmung . . . . .	395
3.16.3. Parallelverschiebung entlang Flächenkurven . . . . .	396
3.16.4. Geodätische Linien . . . . .	397
3.17. Vektoren in Mannigfaltigkeiten . . . . .	398
3.17.1. Innere Geometrie auf Mannigfaltigkeiten . . . . .	398
3.17.2. Kennzeichnung von Vektoren . . . . .	399
3.17.3. Definition eines Vektors . . . . .	402
3.17.4. Ein Beispiel . . . . .	403
3.17.5. Kovariante und kontravariante Größen . . . . .	405
3.18. Länge, Winkel und Inhalt in Mannigfaltigkeiten . . . . .	406
3.18.1. Die riemannsche Metrik . . . . .	406

3.18.2. Metrische Fundamentalgrößen und Kartenwechsel . . . . .	407
3.18.3. Ein Beispiel . . . . .	407
3.18.4. Länge und Winkel . . . . .	408
3.18.5. Spiralen . . . . .	409
3.18.6. Das Inhaltselement . . . . .	411
3.18.7. Ein Beispiel . . . . .	413
3.19. Krümmungen einer Mannigfaltigkeit . . . . .	414
3.19.1. Die Christoffelsymbole . . . . .	414
3.19.2. Die Diskussion einer Mannigfaltigkeit . . . . .	417
3.19.3. Ein Beispiel . . . . .	418
3.19.4. Die Krümmungsformen . . . . .	419
3.19.5. Das kovariante Differential . . . . .	421
3.19.6. Die poincarésche Halbebene . . . . .	423
3.19.7. Euklids Parallelenaxiom . . . . .	424
3.20. Beispiele und Ergänzungen . . . . .	426
3.20.1. Bewegliches Zweibein . . . . .	426
3.20.2. Funktionskurven . . . . .	426
3.20.3. Beispiele ebener Kurven . . . . .	428
3.20.4. Implizit gegebene Kurven . . . . .	428
3.20.5. Rollkurven . . . . .	430
3.20.6. Kegelschnittlinien . . . . .	431
3.20.7. Das zyklische Bild ebener Kurven . . . . .	433
3.20.8. Sphärische Trigonometrie . . . . .	434
3.20.9. Die Drehwinkel einer speziellen orthogonalen Matrix . . . . .	435
3.20.10. Beispiele von Flächen . . . . .	436
3.20.11. Die dupinsche Indikatrix . . . . .	438
3.20.12. Das sphärische Bild von Flächen . . . . .	439
3.20.13. Kartenprojektionen . . . . .	440
3.20.14. Das $N$ -dimensionale Inhaltselement . . . . .	444
3.20.15. Vektoranalysis . . . . .	445
3.20.16. Orthogonale Koordinatensysteme im Raum . . . . .	449
3.20.17. Die Liealgebra der Differentialoperatoren . . . . .	451
3.20.18. Relationen des Krümmungstensors . . . . .	452
<b>4. DIFFERENTIALGLEICHUNGEN . . . . .</b>	<b>454</b>
4.1. Der Begriff Differentialgleichung . . . . .	454
4.1.1. Zustandsgleichung und Differentialgleichung . . . . .	454
4.1.2. Der radioaktive Zerfall . . . . .	455
4.1.3. Differentialgleichung des radioaktiven Zerfalls . . . . .	456
4.1.4. Diskussion der Lösung . . . . .	458
4.1.5. Das Richtungsfeld des radioaktiven Zerfalls . . . . .	458
4.1.6. Reguläre und singuläre Stellen . . . . .	459
4.2. Existenz- und Eindeutigkeitssatz . . . . .	461
4.2.1. Resolvente und integrierender Faktor . . . . .	461
4.2.2. Rückführung auf Funktionen . . . . .	462
4.2.3. Rückführung auf eine Integralgleichung . . . . .	463
4.2.4. Die Supremumsnorm . . . . .	464
4.2.5. Die Lipschitzbedingung . . . . .	465

4.2.6. Der Hauptsatz . . . . .	466
4.2.7. Mehrdimensionale Verallgemeinerung . . . . .	467
4.2.8. Mehrdimensionale Fassung des Hauptsatzes . . . . .	468
4.3. Newtons Physik in einer Dimension . . . . .	469
4.3.1. Das erste newtonsche Axiom . . . . .	469
4.3.2. Zeit, Ort, Geschwindigkeit . . . . .	470
4.3.3. Zustandsgleichung des freien Teilchens . . . . .	472
4.3.4. Das zweite newtonsche Axiom . . . . .	472
4.3.5. Das konstante Beschleunigungsfeld . . . . .	473
4.3.6. Geschwindigkeitsabhängige Beschleunigungsfelder . . . . .	474
4.3.7. Ortsabhängige Beschleunigungsfelder . . . . .	476
4.3.8. Lineare Schwingungen . . . . .	476
4.4. Die Gesetze der Planetenbewegung . . . . .	479
4.4.1. Die keplerschen Gesetze . . . . .	479
4.4.2. Die räumliche Bewegung . . . . .	480
4.4.3. Zentrale Beschleunigungsfelder . . . . .	480
4.4.4. Das Beschleunigungsfeld der Erde . . . . .	482
4.4.5. Diskussion der Bewegungsgleichung . . . . .	484
4.4.6. Ausblick . . . . .	486
4.5. Die lineare Differentialgleichung erster Ordnung . . . . .	487
4.5.1. Die homogene Gleichung . . . . .	487
4.5.2. Die inhomogene Gleichung . . . . .	488
4.5.3. Variation der Konstanten . . . . .	489
4.5.4. Ein Beispiel . . . . .	489
4.5.5. Die Lösungsstruktur . . . . .	490
4.6. Die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung . . . . .	492
4.6.1. Das Superpositionsprinzip . . . . .	492
4.6.2. Die Lösungsstruktur . . . . .	493
4.6.3. Die homogene Gleichung . . . . .	494
4.6.4. Die inhomogene Gleichung . . . . .	496
4.6.5. Die Wronskideterminante . . . . .	497
4.6.6. Ein Beispiel . . . . .	499
4.6.7. Der Fall konstanter Koeffizienten . . . . .	500
4.6.8. Die Rückführung auf die lineare Schwingung . . . . .	502
4.7. Totale Differentialgleichungen . . . . .	504
4.7.1. Aufgabenstellung . . . . .	504
4.7.2. Die Integrierbarkeitsbedingung . . . . .	505
4.7.3. Rückführung auf den Existenz- und Eindeigkeitssatz . . . . .	506
4.7.4. Variation der Konstanten . . . . .	507
4.7.5. Beispiele . . . . .	508
4.7.6. Der Hauptsatz . . . . .	510
4.8. Totale Differentialgleichungssysteme . . . . .	511
4.8.1. Aufgabenstellung . . . . .	511
4.8.2. Die Integrierbarkeitsbedingungen . . . . .	513
4.8.3. Rückführung auf den Existenz- und Eindeigkeitssatz . . . . .	513

4.8.4. Variation der Konstanten . . . . .	515
4.8.5. Der Hauptsatz . . . . .	517
4.9. Beispiele und Ergänzungen . . . . .	518
4.9.1. Richtungsfelder von Differentialgleichungen . . . . .	518
4.9.2. Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen . . . . .	519
4.9.3. Die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion . . . . .	520
4.9.4. Der lenzsche Vektor . . . . .	520
4.9.5. Konservative Beschleunigungsfelder . . . . .	521
4.9.6. Das mathematische Pendel und das Zykloidenpendel . . . . .	522
4.9.7. Das Fundamentallemma der Variationsrechnung . . . . .	524
4.9.8. Abstrakte physikalische Systeme . . . . .	527
4.9.9. Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	529
4.9.10. Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung . . . . .	530
4.9.11. Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	532
4.9.12. Totale Differentialgleichungen . . . . .	534
4.9.13. Lineare partielle Differentialgleichungen . . . . .	535
4.9.14. Schwingungsgleichungen . . . . .	536
4.9.15. Populationsgleichungen . . . . .	538
<b>LITERATURVERZEICHNIS . . . . .</b>	<b>540</b>
<b>NAMEN- UND SACHVERZEICHNIS . . . . .</b>	<b>544</b>