

Codierung zur Fehlerkorrektur und Fehlererkennung

von

Dr.-techn. Joachim Swoboda

Mit 39 Bildern und 24 Tafeln

R. OLDENBOURG VERLAG MÜNCHEN WIEN 1973



Inhalt

Vorwort	9
1. Einführung	11
1.1 Redundante Codierung	12
1.2 Die einfache Paritätskontrolle	15
1.3 Das Verfahren von Hamming	16
1.4 Geometrische Deutung des Code-Raumes, Hamming-Distanz und korrigierbare Fehlerzahl	18
1.5 Dichtgepackte Codes und Hamming-Grenze	21
1.6 Rückgekoppelte Schieberegister und zyklische Codes	22
1.7 Zur Historie der Codierungsverfahren, Probleme und Entwicklungstendenzen	24
2. Algebra der Restklassen (1. Teil)	26
2.1 Restklassen bezüglich einer Zahl M , Rechnung <i>modulo</i> M	26
2.2 Definition und Beispiele für <i>Gruppe</i> , <i>Ring</i> und <i>Körper</i>	27
2.2.1 Axiome und Beispiele für <i>Ring</i> und <i>Körper</i>	29
2.3 Gesetze für die Rechnung <i>modulo</i> M	31
2.3.1 Beweis von Satz 2.1	31
2.4 Vektoren, Matrizen und lineare Gleichungen	33
3. Einige Klassen und Eigenschaften von Binär-codes	37
3.1 Binäre Block-Codes	37
3.1.1 Einige Eigenschaften von Block-Codes	38
3.2 Binäre Gruppen-Codes	39
3.2.1 Nachweis für die Erfüllung der Gruppenaxiome	40
3.2.2 Distanz- und Gewichtsverteilung eines Gruppencode	40
3.3 Lineare systematische Binär-codes	42
3.3.1 Nachweis der Gruppen-Axiome für den linearen systematischen Code	43
3.3.2 Erkennbarkeit von Fehlern	44

3.3.3	Bedingungen an die Prüfspalten bei vorgegebener Hamming-Distanz . . .	46
3.3.4	Korrigierbarkeit von Fehlermustern	46
3.3.5	Andeutung für das Aufstellen eines Prüfschemas	47
3.4	Zyklische Binär-Codes	48
3.4.1	Der zyklische Code als spezieller Gruppen-Code	48
3.4.2	Die Ermittlung der Kontrollstellen	50
3.4.3	Zur Gruppeneigenschaft des zyklischen Code	51
4.	Algebra der Restklassen (2. Teil: Polynom-Restklassen)	53
4.1	Polynome in der Rechnung <i>modulo</i> 2	53
4.1.1	Reduzible Polynome	54
4.1.2	Irreduzible Polynome	54
4.2	Restklassen bezüglich eines Polynoms $M(u)$, Rechnung <i>modulo</i> $M(u)$. . .	56
4.2.1	Beweis des Satzes 4.1	57
4.3	Ein Beispiel für die Rechnung <i>modulo</i> $M(u)$	59
4.4	Zyklische Eigenschaft der Potenzreste	60
4.4.1	Beispiele für den Zyklus der Polynomreste	61
4.4.2	Ergänzendes zum Zyklus der Potenzreste	64
4.5	Polynombeschreibung für rückgekoppelte Schieberegister	65
4.6	Wurzeln und Minimalpolynome	67
4.6.1	Die Wurzeln eines Polynoms $P(u)$	68
4.6.2	Das Minimalpolynom eines Elementes a	69
5.	Allgemeine Eigenschaften von zyklischen Binär-Codes	72
5.1	Zyklische Eigenschaft der Codeworte und verkürzte zyklische Codes . . .	73
5.2	Das Prüfschema zyklischer Binär-Codes	74
5.2.1	Eine erste Herleitung des Prüfschemas	74
5.2.2	Eine zweite Herleitung des Prüfschemas	76
5.3	Erkennbarkeit von beliebig verteilten Fehlerstellen	77
5.3.1	Erkennbarkeit eines Fehlerbüschels	78
5.4	Differenzgleichung für die Codewortstellen	78
6.	Spezielle zyklische Codes	82
6.1	Der zyklische Hamming-Code	82
6.1.1	Beweis der Codeeigenschaften	83
6.1.2	Die Gewichtsverteilung des Hamming-Code	83
6.2	Der zyklische Abramson-Code	85
6.2.1	Das Prüfschema des Abramson-Code	86
6.2.2	Beweis der Codeeigenschaften	88
6.2.3	Die Gewichtsverteilung des Abramson-Code	89

6.3	Der Fire-Code	89
6.3.1	Das Prüfschema des Fire-Code	90
6.3.2	Beweis der Codeeigenschaften	92
6.3.3	Zur Korrektur eines Fehlerbüschels	95
6.4	Der Bose-Chaudhuri-Code	95
6.4.1	Beispiel für einen BCH-Code, Prüfschema und Generatorpolynom	96
6.4.2	Beweis der Codeeigenschaften	100
6.5	Weitere Codes	101
6.5.1	Das Verfahren der Codespreizung	101
6.5.2	Reed-Muller-Code	102
6.5.3	Reed-Solomon-Code	102
7.	Schaltungen für Codierung und Decodierung zyklischer Codes	104
7.1	Schaltungen für die Codierung	106
7.1.1	Schaltungen aus dem Generatorpolynom $G(u)$	107
7.1.2	Schaltungen aus dem orthogonalen Polynom $H(u)$	108
7.2	Schaltungen für die Fehlererkennung	110
7.3	Schaltungen für die Fehlerkorrektur	110
7.3.1	Detektormuster für eine Fehlerstelle	112
7.3.2	Detektormuster für Büschelfehler	113
7.3.3	Bemerkung zur Korrektur beliebiger Fehler	115
8.	Zur Restfehlerwahrscheinlichkeit	116
8.1	Die Verteilung der Fehlerzahl in einem Codewort	117
8.2	Restfehlerwahrscheinlichkeit bei Fehlerkorrektur	119
8.3	Restfehlerwahrscheinlichkeit bei Fehlererkennung	121
8.3.1	Zur Reduktionsfunktion	124
8.4	Ein Beispiel zum Vergleich	126
9.	Anwendungsbeispiele	128
9.1	Beispiele aus der Informationsübertragung	128
9.2	Beispiele aus der Informationsspeicherung	132
9.3	Beispiele aus der Informationsverarbeitung	134
10.	Ausblick: Weitere Korrekturverfahren	137
10.1	Korrektur durch Listenvergleich	137
10.2	Korrektur mittels Permutation der Codeworte	137
10.3	Korrektur durch probeweise Fehlermuster-Überlagerung	139

10.4 Stellenweise Korrektur für BCH-Codes 139

10.5 Stufen-Codes und ihre Korrektur 140

10.6 Sequentielle Codes 141

10.7 Sequentielle Decodierung 143

10.8 Korrektur durch Schwellwert-Decodierung 145

Literatur 147

Stichwortverzeichnis 152