

Richard Courant David Hilbert

# Methoden der mathematischen Physik

Mit einem Vorwort  
von Peter Lax

Vierte Auflage

Springer-Verlag  
Berlin Heidelberg New York  
London Paris Tokyo  
Hong Kong Barcelona  
Budapest

# Inhaltsverzeichnis.

## Erstes Kapitel.

### Die Algebra der linearen Transformationen und quadratischen Formen.

§ 1. Lineare Gleichungen und lineare Transformationen . . . . .	1
1. Vektoren S. 1. — 2. Orthogonale Vektorensysteme. Vollständigkeit S. 3. — 3. Lineare Transformationen, Matrizen S. 5. — 4. Bilinearformen, quadratische und hermitesche Formen S. 10. — 5. Orthogonale und unitäre Transformationen S. 13.	
§ 2. Lineare Transformationen mit linearem Parameter . . . . .	14
§ 3. Die Hauptachsentransformation der quadratischen und Hermiteschen Formen . . . . .	19
1. Die Durchführung der Hauptachsentransformation auf Grund eines Maximumprinzips S. 20. — 2. Charakteristische Zahlen und Eigenwerte S. 22. — 3. Verallgemeinerung auf Hermitesche Formen S. 23. — 4. Trägheitsgesetz der quadratischen Formen S. 24. — 5. Darstellung der Resolvente einer Form S. 24. — 6. Lösung des zu einer Form gehörigen linearen Gleichungssystems S. 25.	
§ 4. Die Minimum-Maximum-Eigenschaft der Eigenwerte . . . . .	26
1. Kennzeichnung der charakteristischen Zahlen durch ein Minimum-Maximumproblem S. 26. — 2. Anwendungen S. 28.	
§ 5. Ergänzungen und Aufgaben zum ersten Kapitel . . . . .	29
1. Lineare Unabhängigkeit und Gramsche Determinante S. 29. — 2. Determinantenabschätzung von Hadamard S. 31. — 3. Simultane Transformation zweier quadratischer Formen in kanonische Gestalt S. 32. — 4. Bilinearformen und quadratische Formen von unendlich vielen Variablen S. 33. — 5. Unendlich kleine lineare Transformationen S. 33. — 6. Variierte Systeme S. 34. — 7. Die Auferlegung einer Bindung S. 36. — 8. Elementarteiler einer Matrix oder einer Bilinearform S. 36. — 9. Spektrum einer unitären Matrix S. 37. — Literatur zum ersten Kapitel S. 38.	

## Zweites Kapitel.

### Das Problem der Reihenentwicklung willkürlicher Funktionen.

§ 1. Orthogonale Funktionensysteme . . . . .	40
1. Definitionen S. 40. — 2. Orthogonalisierung von Funktionen S. 41. — 3. Besselsche Ungleichung, Vollständigkeitsrelation. Approximation im Mittel S. 42. — 4. Orthogonale und unitäre Transformationen in unendlich vielen Veränderlichen S. 45. — 5. Gültigkeit der Ergebnisse bei mehreren unabhängigen Veränderlichen. Erweiterung der Voraussetzungen S. 46. — 6. Erzeugung vollständiger Funktionensysteme in mehreren Variablen S. 46.	
§ 2. Das Häufungsprinzip für Funktionen . . . . .	47
1. Konvergenz im Funktionenraum S. 47.	

§ 3. Unabhängigkeitsmaß und Dimensionenzahl . . . . .	51
1. Unabhängigkeitsmaß S. 51. — 2. Asymptotische Dimensionenzahl einer Funktionenfolge S. 53.	
§ 4. Der Weierstraßsche Approximationssatz. Vollständigkeit der Potenzen und der trigonometrischen Funktionen. . . . .	55
1. Der Weierstraßsche Approximationssatz S. 55. — 2. Ausdehnung des Ergebnisses auf Funktionen von mehreren Veränderlichen S. 57. — 3. Gleichzeitige Approximation der Ableitungen S. 57. — 4. Vollständigkeit der trigonometrischen Funktionen S. 57.	
§ 5. Die Fouriersche Reihe . . . . .	58
1. Beweis des Hauptsatzes S. 58. — 2. Mehrfache Fouriersche Reihen S. 62. — 3. Die Größenordnung der Fourierschen Entwicklungskoeffizienten S. 62. — 4. Streckung des Grundgebietes S. 63. — 5. Einige Beispiele S. 63.	
§ 6. Das Fouriersche Integral . . . . .	65
1. Beweis des Hauptsatzes S. 65. — 2. Ausdehnung des Resultates auf mehr Variable S. 67. — 3. Reziprozitätsformeln S. 68.	
§ 7. Beispiele für das Fouriersche Integral . . . . .	69
§ 8. Die Polynome von Legendre . . . . .	70
1. Erzeugung durch Orthogonalisierung der Potenzen $1, x, x^2$ S. 70. — 2. Die erzeugende Funktion S. 72. — 3. Weitere Eigenschaften S. 73.	
§ 9. Beispiele anderer Orthogonalsysteme. . . . .	74
1. Verallgemeinerung der zu den Legendreschen Polynomen führenden Fragestellung S. 74. — 2. Die Tschebyscheffschen Polynome S. 75. — 3. Die Jacobischen Polynome S. 76. — 4. Die Hermiteschen Polynome S. 77. — 5. Die Laguerreschen Polynome S. 79. — 6. Vollständigkeit der Laguerreschen und Hermiteschen Polynome S. 81.	
§ 10. Ergänzungen und Aufgaben zum zweiten Kapitel. . . . .	82
1. Die Hurwitzsche Lösung des isoperimetrischen Problems S. 82. — 2. Reziprozitätsformeln S. 83. — 3. Fouriersches Integral und mittlere Konvergenz S. 84. — 4. Spektrale Zerlegung durch Fouriersche Reihe und Fouriersches Integral S. 85. — 5. Dichte Funktionensysteme S. 85. — 6. Ein Satz von H. MÜNTZ über die Vollständigkeit von Potenzen S. 86. — 7. Der Fejérsche Summationssatz S. 86. — 8. Die Mellinschen Umkehrformeln S. 87. — 9. Das Gibbssche Phänomen S. 90. — 10. Ein Satz über die Gramsche Determinante S. 91. — 11. Anwendung des Lebesgueschen Integralbegriffes S. 92. — Literatur zum zweiten Kapitel S. 94.	

## Drittes Kapitel.

## Theorie der linearen Integralgleichungen.

§ 1. Vorbereitende Betrachtungen . . . . .	96
1. Bezeichnungen und Grundbegriffe S. 96. — 2. Quellenmäßig dargestellte Funktionen S. 97. — 3. Ausgeartete Kerne S. 98.	
§ 2. Die Fredholmschen Sätze für ausgeartete Kerne . . . . .	99
§ 3. Die Fredholmschen Sätze für einen beliebigen Kern . . . . .	101
§ 4. Die symmetrischen Kerne und ihre Eigenwerte . . . . .	104
1. Existenz eines Eigenwertes bei einem symmetrischen Kern S. 104. — 2. Die Gesamtheit der Eigenfunktionen und Eigenwerte S. 107. — 3. Die Maximum-Minimum-Eigenschaft der Eigenwerte S. 112.	
§ 5. Der Entwicklungssatz und seine Anwendungen . . . . .	114
1. Der Entwicklungssatz S. 114. — 2. Auflösung der inhomogenen linearen Integralgleichung S. 115. — 3. Die Bilinearformel für die iterierten Kerne S. 116. — 4. Der Mercersche Satz S. 117.	

§ 6. Die Neumannsche Reihe und der reziproke Kern . . . . .	119
§ 7. Die Fredholmschen Formeln . . . . .	121
§ 8. Neubegründung der Theorie . . . . .	124
1. Ein Hilfssatz S. 125. — 2. Die Eigenfunktionen eines symmetrischen Kernes S. 126. — 3. Unsymmetrische Kerne S. 127. — 4. Stetige Ab- hängigkeit der Eigenwerte und Eigenfunktionen vom Kern S. 128.	
§ 9. Erweiterung der Gültigkeitsgrenzen der Theorie. . . . .	128
§ 10. Ergänzungen und Aufgaben zum dritten Kapitel . . . . .	130
1. Beispiele S. 130. — 2. Singuläre Integralgleichungen S. 130. — 3. Me- thode von E. SCHMIDT zur Herleitung der Sätze von FREDHOLM S. 131. — 4. Methode von ENSKOG zur Auflösung symmetrischer Integral- gleichungen S. 132. — 5. Methode von KELLOGG zur Bestimmung von Eigenfunktionen S. 132. — 6. Symbolische Funktionen eines Kerns und ihre Eigenwerte S. 132. — 7. Beispiel eines unsymmetrischen Kerns ohne Nulllösungen S. 133. — 8. Volterrasche Integralgleichungen S. 133. — 9. Abelsche Integralgleichung S. 134. — 10. Die zu einem unsymme- trischen Kerne gehörigen adjungierten Orthogonalsysteme S. 134. — 11. Integralgleichungen erster Art S. 135. — 12. Die Methode der un- endlich vielen Variablen S. 136. — 13. Minimumeigenschaften der Eigen- funktionen S. 136. — 14. Polare Integralgleichungen S. 136. — 15. Sym- metrisierbare Kerne S. 137. — 16. Bestimmung des lösenden Kernes durch Funktionalgleichungen S. 137. — 17. Die Stetigkeit der definiten Kerne S. 137. — 18. Satz von HAMMERSTEIN S. 137. — Literatur zum dritten Kapitel S. 137.	

#### Viertes Kapitel.

### Die Grundtatsachen der Variationsrechnung.

§ 1. Die Problemstellung der Variationsrechnung . . . . .	139
1. Maxima und Minima von Funktionen S. 139. — 2. Funktionen- funktionen S. 142. — 3. Die typischen Probleme der Variationsrechnung S. 144. — 4. Die charakteristischen Schwierigkeiten der Variations- rechnung S. 147.	
§ 2. Ansätze zur direkten Lösung . . . . .	148
1. Isoperimetrisches Problem S. 149. — 2. Das Ritzsche Verfahren. Minimalfolgen S. 149. — 3. Weitere direkte Methoden. Differenzen- verfahren. Unendlich viele Veränderliche S. 151. — 4. Prinzipielles über die direkten Methoden der Variationsrechnung S. 156.	
§ 3. Die Eulerschen Gleichungen der Variationsrechnung . . . . .	157
1. Das einfachste Problem der Variationsrechnung S. 158. — 2. Mehrere gesuchte Funktionen S. 161. — 3. Auftreten höherer Ableitungen S. 163. — 4. Mehrere unabhängige Variable S. 164. — 5. Identisches Ver- schwinden des Eulerschen Differentialausdruckes. Divergenzausdrücke S. 165. — 6. Homogene Form der Eulerschen Differentialgleichungen S. 168. — 7. Variationsprobleme mit Erweiterung der Zulassungs- bedingungen. Sätze von DU BOIS-REYMOND und HAAR S. 171. — 8. An- dere Variationsprobleme und ihre Funktionalgleichungen S. 176.	
§ 4. Bemerkungen und Beispiele zur Integration der Eulerschen Differential- gleichung. . . . .	177
§ 5. Randbedingungen . . . . .	179
1. Natürliche Randbedingungen bei freien Rändern S. 179. — 2. Geo- metrische Probleme. Transversalität S. 181.	
§ 6. Die zweite Variation und die Legendresche Bedingung . . . . .	184

§ 7. Variationsprobleme mit Nebenbedingungen . . . . .	186
1. Isoperimetrische Probleme S. 187. — 2. Endliche Bedingungs- gleichungen S. 189. — 3. Differentialgleichungen als Nebenbedingungen S. 191.	
§ 8. Der invariante Charakter der Eulerschen Differentialgleichungen . . .	192
1. Der Eulersche Ausdruck als Gradient im Funktionenraume. Invarianz des Eulerschen Ausdruckes S. 192. — 2. Transformationen von $\Delta u$ . Polar- koordinaten S. 194. — 3. Elliptische Koordinaten S. 195.	
§ 9. Transformation von Variationsproblemen in die kanonische und involu- torische Gestalt . . . . .	199
1. Transformation bei gewöhnlichen Minimumproblemen mit Neben- bedingungen S. 199. — 2. Die involutorische Transformation der ein- fachsten Variationsprobleme S. 201. — 3. Die Transformation des Variationsproblems in die kanonische Gestalt S. 206. — 4. Verall- gemeinerungen S. 207.	
§ 10. Variationsrechnung und Differentialgleichungen der mathematischen Physik . . . . .	210
1. Allgemeines S. 210. — 2. Schwingende Saite (Seil) und schwin- gender Stab S. 212. — 3. Membran und Platte S. 214.	
§ 11. Ergänzungen und Aufgaben zum vierten Kapitel . . . . .	219
1. Variationsproblem zu gegebener Differentialgleichung S. 219. — 2. Reziprozität bei isoperimetrischen Problemen S. 219. — 3. Kreis- förmige Lichtstrahlen S. 219. — 4. Das Problem der Dido S. 219. — 5. Beispiel eines räumlichen Problems S. 219. — 6. Das isoperimetrische Problem auf einer krummen Fläche S. 220. — 7. Die Indikatrix und ihre Anwendungen S. 220. — 8. Variation bei veränderlichem Gebiet S. 221. — 9. Die Sätze von E. NOETHER über invariante Variationsprobleme. Integrale in der Punktmechanik S. 223. — 10. Transversalität bei mehr- fachen Integralen S. 226. — 11. Eulersche Differentialausdrücke auf krummen Flächen S. 227. — 12. Das Thomsonsche Prinzip der Elektro- statik S. 227. — 13. Gleichgewichtsprobleme beim elastischen Körper. Prinzip von Castiglione S. 228. — 14. Das Prinzip von Castiglione in der Balkentheorie S. 230. — 15. Das Variationsproblem der Knickung S. 232. — Literatur zum vierten Kapitel S. 233.	

## Fünftes Kapitel

Die Schwingungs- und Eigenwertprobleme der  
mathematischen Physik.

§ 1. Vorbemerkungen über lineare Differentialgleichungen . . . . .	234
1. Allgemeines. Das Superpositionsprinzip S. 234. — 2. Homogene und unhomogene Probleme. Randbedingungen S. 236. — 3. Formale Be- ziehungen. Adjungierte Differentialausdrücke. Greensche Formeln S. 236. 4. Lineare Funktionalgleichungen als Grenzfälle und Analoga von Systemen linearer Gleichungen S. 239.	
§ 2. Systeme von endlich vielen Freiheitsgraden . . . . .	240
1. Hauptschwingungen. Normalkoordinaten. Allgemeine Theorie des Bewegungsvorganges S. 240. — 2. Allgemeine Eigenschaften der schwin- genden Systeme S. 244.	
§ 3. Die schwingende Saite . . . . .	245
1. Freie Bewegungen der homogenen Saite S. 245. — 2. Erzwungene Bewegungen S. 248. — 3. Die allgemeine unhomogene Saite und das Sturm-Liouvillesche Eigenwertproblem S. 249.	

§ 4. Der schwingende Stab . . . . .	253
§ 5. Die schwingende Membran . . . . .	255
1. Das allgemeine Eigenwertproblem der homogenen Membran S. 255.	
— 2. Erzwungene Bewegungen S. 257. — 3. Knotenlinien S. 257. —	
4. Rechteckige Membran S. 258. — 5. Kreisförmige Membran. Besselsche	
Funktionen S. 260. — 6. Die inhomogene Membran S. 263.	
§ 6. Die schwingende Platte . . . . .	263
1. Allgemeines S. 263. — 2. Kreisförmige Begrenzung S. 264.	
§ 7. Allgemeines über die Methode der Eigenfunktionen . . . . .	265
1. Die Methode bei Schwingungs- und Gleichgewichtsproblemen S. 265.	
— 2. Wärmeleitung und Eigenwertprobleme S. 268. — 3. Sonstiges Auf-	
treten von Eigenwertproblemen S. 269.	
§ 8. Schwingungen dreidimensionaler Kontinua . . . . .	269
§ 9. Randwertproblem der Potentialtheorie und Eigenfunktionen . . . . .	271
1. Kreis, Kugel, Kugelschale S. 271. — 2. Zylindrisches Gebiet S. 274.	
— 3. Das Lamésche Problem S. 275.	
§ 10. Probleme vom Sturm-Liouvilleschen Typus. Singuläre Randpunkte . . . . .	280
1. Besselsche Funktionen S. 280. — 2. Legendresche Funktionen	
beliebiger Ordnung S. 280. — 3. Jacobische und Tschebyscheffsche	
Polynome S. 282. — 4. Hermitesche und Laguerresche Polynome S. 283.	
§ 11. Über das asymptotische Verhalten der Lösungen Sturm-Liouvillescher	
Differentialgleichungen . . . . .	285
1. Beschränktheit bei unendlich anwachsender unabhängiger Vari-	
abler S. 285. — 2. Verschärfung des Resultates (Besselsche Funk-	
tionen) S. 286. — 3. Beschränktheit bei wachsendem Parameter S. 288.	
— 4. Asymptotische Darstellung der Lösungen S. 289. — 5. Asympto-	
tische Darstellung der Sturm-Liouvilleschen Eigenfunktionen S. 290.	
§ 12. Eigenwertprobleme mit kontinuierlichem Spektrum . . . . .	293
1. Die trigonometrischen Funktionen S. 293. — 2. Die Besselschen	
Funktionen S. 293. — 3. Das Eigenwertproblem der Schwingungs-	
gleichung für die unendliche Ebene S. 294. — 4. Das Schrödingersche	
Eigenwertproblem S. 294.	
§ 13. Störungsrechnung . . . . .	296
1. Einfache Eigenwerte S. 297. — 2. Mehrfache Eigenwerte S. 298. —	
3. Ein Beispiel zur Störungstheorie S. 300.	
§ 14. Die Greensche Funktion (Einflußfunktion) und die Zurückführung von	
Differentialgleichungsproblemen auf Integralgleichungen . . . . .	302
1. Die Greensche Funktion und das Randwertproblem für gewöhnliche	
Differentialgleichungen S. 302. — 2. Die Konstruktion der Greenschen	
Funktion und die Greensche Funktion im erweiterten Sinne S. 306. —	
3. Äquivalenz von Differentialgleichungs- und Integralgleichungs-	
problem S. 309. — 4. Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer	
Ordnung S. 313. — 5. Partielle Differentialgleichungen S. 314.	
§ 15. Beispiele für Greensche Funktionen . . . . .	321
1. Gewöhnliche Differentialgleichungen S. 321. — 2. Greensche	
Funktion von $\Delta u$ für Kreis und Kugel S. 326. — 3. Greensche Funktion	
und konforme Abbildung S. 327. — 4. Die Greensche Funktion der	
Potentialgleichung für eine Kugeloberfläche S. 327. — 5. Die Greensche	
Funktion der Gleichung $\Delta u = 0$ für ein Rechteck S. 328. — 6. Die	
Greensche Funktion von $\Delta u$ für das Innere eines Rechtecks S. 333. —	
7. Die Greensche Funktion für einen Kreisring S. 335.	

§ 16. Ergänzungen zum fünften Kapitel . . . . .	337
1. Beispiele zur schwingenden Saite S. 337. — 2. Schwingungen des frei herabhängenden Seils und Besselsche Funktionen S. 338. — 3. Weitere Beispiele für explizit lösbare Fälle der Schwingungsgleichung. Funktionen von MATHIEU S. 339. — 4. Parameter in den Randbedingungen S. 340. — 5. Greensche Tensoren für Differentialgleichungssysteme S. 341. — 6. Analytische Fortsetzung der Lösungen der Gleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ S. 342. — 7. Ein Satz über die Knotenlinien der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ S. 342. — 8. Beispiel für einen Eigenwert unendlich hoher Ordnung S. 342. — 9. Grenzen für die Gültigkeit der Entwicklungssätze. S. 343. — Literatur zum fünften Kapitel S. 343.	
Sechstes Kapitel.	
<b>Anwendung der Variationsrechnung auf die Eigenwertprobleme.</b>	
§ 1. Die Extremumseigenschaften der Eigenwerte . . . . .	345
1. Die klassischen Extremumseigenschaften S. 345. — 2. Ergänzungen und Verallgemeinerungen S. 348. — 3. Eigenwertprobleme für Bereiche mit getrennten Bestandteilen S. 351. — 4. Die Maximum-Minimum-Eigenschaft der Eigenwerte S. 351.	
§ 2. Allgemeine Folgerungen aus den Extremumseigenschaften der Eigenwerte	353
1. Allgemeine Sätze S. 353. — 2. Das unendliche Anwachsen der Eigenwerte S. 358. — 3. Asymptotisches Verhalten der Eigenwerte beim Sturm-Liouvilleschen Problem S. 360. — 4. Singuläre Differentialgleichungen S. 361. — 5. Weitere Bemerkungen über das Anwachsen der Eigenwerte. Auftreten negativer Eigenwerte S. 362. — 6. Stetigkeitseigenschaften der Eigenwerte S. 363.	
§ 3. Der Vollständigkeitssatz und der Entwicklungssatz . . . . .	368
1. Die Vollständigkeit der Eigenfunktionen S. 368. — 2. Der Entwicklungssatz S. 370. — 3. Verschärfung des Entwicklungssatzes S. 371.	
§ 4. Die asymptotische Verteilung der Eigenwerte . . . . .	373
1. Die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ für ein Rechteck S. 373. — 2. Die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ bei Gebieten, welche aus endlich vielen Quadraten oder Würfeln bestehen S. 374. — 3. Ausdehnung des Resultates auf die allgemeine Differentialgleichung $L[u] + \lambda \rho u = 0$ S. 377. — 4. Die Gesetze der asymptotischen Eigenwertverteilung für einen beliebigen Bereich S. 379. — 5. Die Gesetze der asymptotischen Eigenwertverteilung für die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ in verschärfter Form S. 385.	
§ 5. Eigenwertprobleme vom Schrödingerschen Typus. . . . .	387
§ 6. Die Knoten der Eigenfunktionen. . . . .	392
§ 7. Ergänzungen und Aufgaben zum sechsten Kapitel . . . . .	397
1. Ableitung der Minimumeigenschaften der Eigenwerte aus ihrer Vollständigkeit S. 397. — 2. Charakterisierung der ersten Eigenfunktion durch ihre Nullstellenfreiheit S. 398. — 3. Andere Minimumeigenschaften der Eigenwerte S. 399. — 4. Asymptotische Eigenwertverteilung bei der schwingenden Platte S. 400. — 5. bis 7. Aufgaben S. 400. — 8. Parameter in den Randbedingungen S. 400. — 9. Eigenwertprobleme für geschlossene Flächen S. 401. — 10. Eigenwertabschätzungen beim Auftreten von singulären Punkten S. 401. — 11. Minimumsätze für Membran und Platte S. 402. — 12. Minimumprobleme bei variabler Massenverteilung S. 403. — 13. Knotenpunkte beim Sturm-Liouvilleschen Problem und Maximum-Minimum-Prinzip S. 403. — Literatur zum sechsten Kapitel S. 404.	

Siebentes Kapitel.

**Spezielle durch Eigenwertprobleme definierte Funktionen.**

§ 1. Vorbemerkungen über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung . 405

§ 2. Die Besselschen Funktionen . . . . . 406  
 1. Durchführung der Integraltransformation S. 407. — 2. Die Hankelschen Funktionen S. 407. — 3. Die Besselschen und Neumannschen Funktionen S. 410. — 4. Integraldarstellungen der Besselschen Funktionen S. 412. — 5. Eine andere Integraldarstellung der Hankelschen und Besselschen Funktionen S. 414. — 6. Potenzreihenentwicklung der Besselschen Funktionen S. 418. — 7. Relationen zwischen den Besselschen Funktionen S. 420. — 8. Die Nullstellen der Besselschen Funktionen S. 426. — 9. Die Neumannschen Funktionen S. 429.

§ 3. Die Kugelfunktionen von Legendre . . . . . 433  
 1. Das Schläflische Integral S. 433. — 2. Die Integraldarstellungen von Laplace S. 435. — 3. Die Legendreschen Funktionen zweiter Art S. 435. — 4. Zugeordnete Kugelfunktionen (Legendresche Funktionen höherer Ordnung) S. 437.

§ 4. Anwendung der Methode der Integraltransformation auf die Legendreschen, Tschebyscheffschen, Hermiteschen und Laguerreschen Differentialgleichungen. . . . . 437  
 1. Legendresche Funktionen S. 437. — 2. Die Tschebyscheffschen Funktionen S. 439. — 3. Die Hermiteschen Funktionen S. 440. — 4. Die Laguerreschen Funktionen S. 440.

§ 5. Die Kugelfunktionen von Laplace . . . . . 441  
 1. Aufstellung von  $2n + 1$  Kugelfunktionen  $n$ ter Ordnung S. 442. — 2. Vollständigkeit des gewonnenen Funktionensystems S. 443. — 3. Der Entwicklungssatz S. 443. — 4. Das Poissonsche Integral S. 444. — 5. Die Maxwell-Sylvestersche Darstellung der Kugelfunktionen S. 445.

§ 6. Asymptotische Entwicklungen . . . . . 451  
 1. Die Stirlingsche Formel S. 452. — 2. Asymptotische Berechnung der Hankelschen und Besselschen Funktionen für große Argumente S. 453. — 3. Sattelpunktmethode S. 455. — 4. Anwendung der Sattelpunktmethode zur Berechnung der Hankelschen und Besselschen Funktionen bei großem Parameter und großem Argument S. 456. — 5. Allgemeine Bemerkungen über die Sattelpunktmethode S. 460. — 6. Methode von DARBOUX S. 460. — 7. Anwendung der Darbouxschen Methode zur asymptotischen Entwicklung der Legendreschen Polynome S. 461.

**Anhang**

Entnommen aus dem dem Band II von Courant – Hilbert:  
 Methoden der mathematischen Physik  
*Seitenangaben der Überschriften, die sich einem § unterordnen  
 beziehen sich auf den erwähnten Band,  
 dessen Seitenzahlen der Leser dort am Fuß der Seite findet*

Siebentes Kapitel.

**Lösung der Rand- und Eigenwertprobleme auf Grund der Variationsrechnung.**

§ 1. Vorbereitungen . . . . . 467  
 1. Das Dirichletsche Prinzip für den Kreis S. 473. — 2. Allgemeine Problemstellungen S. 476. — 3. Lineare Funktionenräume mit quadratischer Metrik. Definitionen S. 478. — 4. Randbedingungen S. 482.

§ 2. Die erste Randwertaufgabe . . . . .	477
1. Problemstellung S. 483. — 2. Greensche Formel. Hauptgleichung zwischen $D$ und $H$ . Eindeutigkeit S. 484. — 3. Minimalfolgen und Lösung des Randwertproblems S. 486.	
§ 3. Das Eigenwertproblem bei verschwindenden Randwerten . . . . .	482
1. Integralungleichungen S. 488. — 2. Das erste Eigenwertproblem S. 490. — 3. Höhere Eigenwerte und -funktionen. Vollständigkeit S. 492.	
§ 4. Annahme der Randwerte bei zwei unabhängigen Veränderlichen . . . . .	489
§ 5. Konstruktion der Grenzfunktionen und Konvergenzeigenschaften der Integrale $E, D, H$ . . . . .	491
1. Konstruktion der Grenzfunktionen S. 497. — 2. Konvergenzeigenschaften der Integrale $D$ und $H$ S. 504.	
§ 6. Zweite und dritte Randbedingung. Randwertaufgabe . . . . .	502
1. Greensche Formel und Randbedingungen S. 508. — 2. Formulierung des Randwertproblems und Variationsproblems S. 509. — 3. Einschränkung der Klasse zulässiger Gebiete S. 511. — 4. Äquivalenz von Minimumproblem und Randwertproblem. Eindeutigkeit S. 512. — 5. Lösung des Variationsproblems und Randwertproblems S. 512.	
§ 7. Das Eigenwertproblem bei zweiter und dritter Randwertbildung . . . . .	507
§ 8. Diskussion der bei der zweiten und dritten Randbedingung zugrunde gelegten Gebiete . . . . .	509
1. Gebiete vom Typus $\mathfrak{R}$ S. 515. — 2. Notwendigkeit von einschränkenden Bedingungen für das Gebiet S. 521.	
§ 9. Ergänzungen und Aufgaben . . . . .	517
1. Die Greensche Funktion von $\Delta u$ S. 523. — 2. Dipolsingularität S. 525. — 3. Randverhalten bei $\Delta u = 0$ und zwei unabhängigen Veränderlichen für die zweite Randbedingung S. 526. — 4. Stetige Abhängigkeit vom Gebiet S. 526. — 5. Übertragung der Theorie auf unendlich ausgedehnte Gebiete $G$ S. 527. — 6. Anwendung der Methode auf Differentialgleichungen vierter Ordnung. Transversaldeformation und Schwingungen von Platten S. 528. — 7. Erste Randwert- und Eigenwertaufgabe der Elastizitätstheorie bei zwei Dimensionen S. 530. — 8. Andere Methode zur Konstruktion der Grenzfunktion S. 532.	
§ 10. Das Problem von Plateau . . . . .	529
1. Problemstellung und Ansatz zur Lösung S. 535. — 2. Beweis der Variationsrelationen S. 538. — 3. Existenz der Lösung des Variationsproblems S. 541.	
Ergänzende Literaturangaben . . . . .	538
Sachverzeichnis . . . . .	539
Sachverzeichnis zum Anhang . . . . .	545