

<b>1</b>	<b>Historische Notizen</b>	<b>1</b>
1.1	Wahrheit und Beweisbarkeit . . . . .	1
1.2	Der Weg zur modernen Mathematik . . . . .	7
1.2.1	Rätsel des Kontinuums . . . . .	7
1.2.2	Auf den Spuren der Unendlichkeit . . . . .	13
1.2.3	Macht der Symbole . . . . .	27
1.2.4	Aufbruch in ein neues Jahrhundert . . . . .	31
1.2.5	Grundlagenkrise . . . . .	36
1.2.6	Axiomatische Mengenlehre . . . . .	42
1.2.7	Hilberts Programm und Gödels Beitrag . . . . .	44
1.2.8	Grenzen der Berechenbarkeit . . . . .	53
1.2.9	Auferstanden aus Ruinen . . . . .	61
1.3	Übungsaufgaben . . . . .	67
<b>2</b>	<b>Formale Systeme</b>	<b>71</b>
2.1	Definition und Eigenschaften . . . . .	71
2.2	Entscheidungsverfahren . . . . .	83
2.3	Aussagenlogik . . . . .	87
2.3.1	Syntax und Semantik . . . . .	87
2.3.2	Aussagenlogischer Kalkül . . . . .	93
2.4	Prädikatenlogik erster Stufe . . . . .	103
2.4.1	Syntax und Semantik . . . . .	104
2.4.2	Prädikatenlogischer Kalkül . . . . .	110
2.5	Prädikatenlogik mit Gleichheit . . . . .	113
2.6	Prädikatenlogik höherer Stufe . . . . .	118
2.6.1	Syntax und Semantik . . . . .	118
2.6.2	Henkin-Interpretation . . . . .	122
2.7	Übungsaufgaben . . . . .	125
<b>3</b>	<b>Fundamente der Mathematik</b>	<b>135</b>
3.1	Peano-Arithmetik . . . . .	136
3.1.1	Syntax . . . . .	136
3.1.2	Semantik . . . . .	137
3.1.3	Axiome und Schlussregeln . . . . .	141

3.2	Axiomatische Mengenlehre . . . . .	149
3.2.1	Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre . . . . .	151
3.2.1.1	ZF-Axiome . . . . .	152
3.2.1.2	Das Auswahlaxiom . . . . .	160
3.2.1.3	Mengenlehre als Fundament der Mathematik . . . . .	166
3.2.1.4	Einbettung der natürlichen Zahlen . . . . .	174
3.2.2	Ordinalzahlen . . . . .	176
3.2.2.1	Definition und Eigenschaften . . . . .	176
3.2.2.2	Der Unendlichkeit entgegen . . . . .	181
3.2.2.3	Ordnungstypen und Wohlordnungen . . . . .	188
3.2.2.4	Transfinite Induktion . . . . .	191
3.2.3	Kardinalzahlen . . . . .	194
3.3	Übungsaufgaben . . . . .	196
<b>4</b>	<b>Beweistheorie</b>	<b>201</b>
4.1	Gödel'sche Unvollständigkeitssätze . . . . .	201
4.2	Der erste Unvollständigkeitssatz . . . . .	202
4.2.1	Arithmetisierung der Syntax . . . . .	206
4.2.2	Primitiv-rekursive Funktionen . . . . .	211
4.2.3	Arithmetische Repräsentierbarkeit . . . . .	213
4.2.4	Gödels Diagonalargument . . . . .	220
4.2.5	Rossers Beitrag . . . . .	227
4.2.6	Das Diagonalisierungslemma . . . . .	230
4.2.7	Das Wahrheitsprädikat von Tarski . . . . .	235
4.2.8	Das Berry-Paradoxon . . . . .	240
4.3	Der zweite Unvollständigkeitssatz . . . . .	244
4.3.1	Hilbert-Bernays-Löb-Kriterien . . . . .	247
4.3.2	Der Satz von Löb . . . . .	249
4.4	Gödels Sätze richtig verstehen . . . . .	254
4.5	Der Satz von Goodstein . . . . .	260
4.6	Übungsaufgaben . . . . .	267
<b>5</b>	<b>Berechenbarkeitstheorie</b>	<b>271</b>
5.1	Berechnungsmodelle . . . . .	272
5.1.1	Turing-Maschinen . . . . .	272
5.1.1.1	Erweiterungen des Basismodells . . . . .	276
5.1.1.2	Alternative Beschreibungsformen . . . . .	278
5.1.1.3	Universelle Turing-Maschine . . . . .	281
5.1.2	Registermaschinen . . . . .	286
5.2	Die Church'sche These . . . . .	289
5.3	Grenzen der Berechenbarkeit . . . . .	296
5.3.1	Das Halteproblem . . . . .	296

5.3.2	Der Satz von Rice	299
5.4	Folgen für die Mathematik	301
5.4.1	Unentscheidbarkeit der PL1	302
5.4.2	Unvollständigkeit der Arithmetik	309
5.4.3	Hilberts zehntes Problem	317
	5.4.3.1 Diophantische Repräsentierbarkeit	320
	5.4.3.2 Codierung von Registermaschinen	322
5.5	Übungsaufgaben	333
<b>6</b>	<b>Algorithmische Informationstheorie</b>	<b>341</b>
6.1	Algorithmische Komplexität	342
6.2	Die Chaitin'sche Konstante	350
6.3	Unvollständigkeit formaler Systeme	360
6.4	Übungsaufgaben	363
<b>7</b>	<b>Modelltheorie</b>	<b>367</b>
7.1	Meta-Resultate zur Prädikatenlogik	368
	7.1.1 Modellexistenzsatz	371
	7.1.2 Kompaktheitssatz	373
	7.1.3 Satz von Löwenheim-Skolem	377
7.2	Nichtstandardmodelle von PA	380
	7.2.1 Abzählbare Nichtstandardmodelle	381
	7.2.2 Überabzählbare Nichtstandardmodelle	384
7.3	Das Skolem-Paradoxon	391
7.4	Boolesche Modelle	398
	7.4.1 Boolesche Algebren	400
	7.4.2 Boolesche Mengen	405
	7.4.3 Boolesche Semantik	407
7.5	Forcing	409
7.6	Übungsaufgaben	415
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>421</b>
	<b>Bildnachweis</b>	<b>429</b>
	<b>Namensverzeichnis</b>	<b>431</b>
	<b>Sachwortverzeichnis</b>	<b>435</b>