

# Inhalt

<b>Vorwort</b> .....	5
<b>I. Grundlagen</b>	
1. Grundbegriffe der Logik .....	17
1.1. Aussagen .....	17
1.2. Aussagenfunktionen und Wahrheitsfunktionen .....	19
1.3. Gesetze der Aussagenlogik .....	22
1.4. Elemente der Prädikatenlogik .....	26
1.5. Mathematische Beweise .....	29
1.6. Anwendung auf binäre elektronische Systeme .....	30
1.7. Übungsaufgaben .....	31
2. Zahlen .....	33
2.1. Natürliche und ganze Zahlen .....	33
2.2. Rationale Zahlen .....	35
2.3. Reelle Zahlen .....	36
2.3.1. Irrationale Zahlen .....	36
2.3.2. Intervallschachtelung .....	37
2.3.3. Axiomensystem der reellen Zahlen (Grundgesetze der Arithmetik) .....	39
2.4. Komplexe Zahlen .....	44
2.5. Das Rechnen mit Ungleichungen und absoluten Beträgen .....	49
2.5.1. Ungleichungen .....	49
2.5.2. Absolute Beträge .....	53
2.6. Darstellung von Zahlen in Positionssystemen .....	55
2.7. Das Rechnen mit Näherungswerten .....	59
2.8. Übungsaufgaben .....	62
3. Mengen .....	64
3.1. Der Begriff der Menge .....	64
3.2. Mengenalgebra .....	67
3.3. Zahlenmengen .....	75
3.4. Punktmengen .....	79
3.4.1. Lineare Punktmengen .....	79
3.4.2. Punktmengen im $R^n$ .....	86
3.5. Kombinatorik .....	88
3.5.1. Binomialkoeffizienten .....	88
3.5.2. Der binomische Lehrsatz .....	91
3.5.3. Der polynomische Lehrsatz .....	93
3.5.4. Permutationen .....	96
3.5.5. Variationen .....	100
3.5.6. Kombinationen .....	102
3.6. Einführung in die Graphentheorie .....	103
3.6.1. Einige Grundbegriffe .....	103
3.6.2. Wege und Ketten in Graphen .....	106

3.6.3. Minimale spannende Bäume .....	107
3.6.4. Kürzeste Wege in Graphen .....	108
3.7. Übungsaufgaben .....	109
4. Zahlenfolgen .....	110
4.1. Der Begriff der Zahlenfolge .....	110
4.2. Häufungswerte .....	115
4.2.1. Häufungswert einer Zahlenfolge .....	115
4.2.2. Häufungsgrenzen einer Zahlenfolge .....	116
4.2.3. Untere und obere Grenze einer Zahlenfolge .....	117
4.3. Konvergente Zahlenfolgen .....	119
4.3.1. Definitionen. Erstes Konvergenzkriterium .....	119
4.3.2. Eigenschaften konvergenter Zahlenfolgen .....	124
4.3.3. Wichtige Beispiele konvergenter Zahlenfolgen .....	127
4.4. Monotone Zahlenfolgen .....	129
4.4.1. Definition .....	129
4.4.2. Zweites Konvergenzkriterium .....	131
4.4.3. Die Zahl $e$ .....	133
4.4.4. Anwendung des zweiten Konvergenzkriteriums auf Intervallschachtelungen .....	136
4.5. Das allgemeine Konvergenzkriterium von CAUCHY .....	138
4.6. Übungsaufgaben .....	140

## II. Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen

5. Der Funktionsbegriff .....	143
5.1. Definitionen und Beispiele .....	143
5.2. Zur Darstellung von Funktionen .....	146
5.2.1. Darstellung durch eine Formel .....	146
5.2.2. Darstellung durch eine Tabelle .....	147
5.2.3. Graphische Darstellung .....	148
5.2.4. Darstellung durch Programmiersprachen in Rechnern .....	153
5.3. Einige Grundbegriffe .....	154
5.3.1. Monotone Funktionen .....	154
5.3.2. Gerade und ungerade Funktionen .....	155
5.3.3. Periodische Funktionen .....	156
5.3.4. Der Begriff der Umkehrfunktion .....	158
5.3.5. Zusammengesetzte Funktionen .....	160
5.4. Übungsaufgaben .....	160
6. Grenzwert einer Funktion .....	162
6.1. Grenzwert für $x \rightarrow x_0$ .....	162
6.2. Einseitige Grenzwerte .....	166
6.3. Grenzwertsätze .....	169
6.4. Grenzwert für $x \rightarrow \infty$ oder $x \rightarrow -\infty$ .....	177
6.5. Uneigentliche Grenzwerte .....	179
6.6. Übungsaufgaben .....	183
7. Stetigkeit einer Funktion .....	185
7.1. Definition der Stetigkeit .....	185
7.2. Einseitige Stetigkeit .....	188
7.3. Unstetigkeiten .....	191
7.4. Eigenschaften stetiger Funktionen .....	197
7.4.1. Das Rechnen mit stetigen Funktionen .....	197

7.4.2. Stetigkeit der zusammengesetzten Funktion .....	198
7.4.3. Stetigkeit der Umkehrfunktion .....	199
7.5. Funktionen, die auf einem abgeschlossenen Intervall stetig sind .....	199
7.6. Die Regula falsi .....	202
7.7. Übungsaufgaben .....	205
8. Ganze rationale Funktionen .....	206
8.1. Allgemeine Eigenschaften .....	206
8.1.1. Grundbegriffe .....	206
8.1.2. Affine Funktion .....	207
8.1.3. Quadratische Funktion .....	209
8.1.4. Allgemeine Eigenschaften von Polynomen .....	210
8.2. Potenzfunktionen mit positiven ganzen Exponenten .....	213
8.3. Ermittlung von Funktionswerten .....	215
8.3.1. Das Verfahren von HORNER .....	215
8.3.2. Das Verfahren von LILL .....	217
8.4. Interpolation .....	218
8.4.1. Allgemeine Bemerkungen .....	218
8.4.2. Interpolationsformel von LAGRANGE .....	221
8.4.3. Interpolationsformel von NEWTON .....	224
8.4.4. Interpolation mittels Splinefunktionen .....	233
8.5. Zur Lösung algebraischer Gleichungen .....	236
8.5.1. Allgemeine Bemerkungen .....	236
8.5.2. Kubische Gleichungen .....	238
8.5.3. Das Verfahren von GRAEFFE .....	240
8.6. Übungsaufgaben .....	245
9. Rationale und algebraische Funktionen .....	246
9.1. Definition und grundlegende Eigenschaften der rationalen Funktionen .....	246
9.2. Teilbruchzerlegung der rationalen Funktionen .....	251
9.3. Potenzfunktionen mit negativen ganzen Exponenten .....	252
9.4. Algebraische Funktionen .....	254
9.5. Übungsaufgaben .....	258
10. Exponential- und Logarithmusfunktionen .....	258
10.1. Potenzen .....	258
10.1.1. Potenzen mit ganzen Exponenten .....	258
10.1.2. Potenzen mit rationalen Exponenten .....	259
10.1.3. Potenzen mit reellen Exponenten .....	261
10.2. Definition und Eigenschaften der Exponentialfunktionen .....	261
10.3. Definition und Eigenschaften der Logarithmusfunktionen .....	267
10.4. Potenzfunktionen mit beliebigen reellen Exponenten .....	271
10.5. Einige spezielle Grenzwerte .....	272
10.6. Logarithmische Funktionsleitern und Funktionspapiere .....	273
10.6.1. Logarithmische Funktionsleiter .....	273
10.6.2. Doppeltlogarithmisches Funktionspapier .....	273
10.6.3. Einfachlogarithmisches Funktionspapier .....	275
10.7. Übungsaufgaben .....	277
11. Trigonometrische Funktionen und Arcus-Funktionen .....	278
11.1. Winkelmessung .....	278
11.2. Sinus- und Kosinusfunktion .....	279
11.3. Tangens- und Kotangensfunktion .....	282

11.4. Trigonometrische Darstellung der komplexen Zahlen .....	287
11.5. Schwingungen .....	292
11.5.1. Begriff der harmonischen Schwingung .....	292
11.5.2. Überlagerung harmonischer Schwingungen gleicher Frequenz und gleicher Schwingungsrichtung .....	293
11.5.3. Schwebungen .....	297
11.5.4. Überlagerung bei verschiedener Schwingungsrichtung .....	299
11.6. Grundzüge der komplexen Wechselstromrechnung .....	302
11.7. Arcus-Funktionen .....	306
11.8. Übungsaufgaben .....	313
12. Hyperbolische Funktionen und Area-Funktionen .....	315
12.1. Definition und Eigenschaften der hyperbolischen Funktionen .....	315
12.2. Definition und Eigenschaften der Area-Funktionen .....	319
12.3. Geometrische Deutung der Hyperbelfunktionen .....	322
12.4. Übungsaufgaben .....	327

**III. Differentialrechnung für Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen**

13. Begriff der Ableitung .....	329
13.1. Vorbemerkung .....	329
13.2. Definition der Ableitung .....	329
13.3. Einseitige Ableitungen .....	332
13.4. Uneigentliche Ableitungen .....	333
13.5. Geometrische Bedeutung der Ableitung .....	334
13.6. Anwendungen der Ableitung in den Naturwissenschaften .....	336
13.7. Weierstraßsche Zerlegungsformel .....	340
13.8. Stetigkeit und Differenzierbarkeit .....	341
13.9. Übungsaufgaben .....	342
14. Allgemeine Regeln über Ableitungen .....	342
14.1. Ableitung einer Konstanten .....	343
14.2. Ableitung einer Linearkombination von Funktionen .....	343
14.3. Ableitung eines Produktes von Funktionen .....	344
14.4. Ableitung eines Quotienten von Funktionen .....	346
14.5. Ableitung einer zusammengesetzten Funktion .....	348
14.6. Übungsaufgaben .....	350
15. Ableitung elementarer transzendenter Funktionen .....	350
15.1. Trigonometrische Funktionen .....	350
15.2. Exponentialfunktionen .....	353
15.3. Hyperbolische Funktionen .....	355
15.4. Übungsaufgaben .....	356
16. Ableitung der Umkehrfunktion .....	357
16.1. Allgemeine Bemerkungen .....	357
16.2. Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten .....	359
16.3. Arcus-Funktionen .....	361
16.4. Logarithmusfunktionen .....	364
16.5. Potenzfunktionen mit beliebigen reellen Exponenten .....	367
16.6. Area-Funktionen .....	369
16.7. Übungsaufgaben .....	369

17. Das Differential einer Funktion .....	370
17.1. Definition .....	370
17.2. Geometrische Bedeutung des Differentials .....	371
17.3. Funktionszuwachs und Differential .....	372
17.4. Anwendungen in der Fehlerrechnung .....	373
17.5. Übungsaufgaben .....	374
18. Höhere Ableitungen .....	375
18.1. Definition der Ableitung $n$ -ter Ordnung .....	375
18.2. Höhere Ableitungen einiger elementarer Funktionen .....	376
18.2.1. Potenzfunktionen .....	376
18.2.2. Exponential- und Logarithmusfunktionen .....	378
18.2.3. Trigonometrische Funktionen .....	378
18.2.4. Ableitungen eines Produktes von Funktionen .....	379
18.3. Zur physikalischen Bedeutung der zweiten Ableitung .....	379
18.4. Differentiale höherer Ordnung .....	381
18.5. Übungsaufgaben .....	382
19. Mittelwertsätze der Differentialrechnung .....	382
19.1. Satz von ROLLE .....	382
19.2. Mittelwertsatz der Differentialrechnung .....	384
19.3. Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung .....	388
19.4. Übungsaufgaben .....	389
20. Berechnung von Grenzwerten .....	390
20.1. Vorbemerkung .....	390
20.2. Erste Regel von BERNOULLI-DE L'HOSPITAL .....	391
20.3. Zweite Regel von BERNOULLI-DE L'HOSPITAL .....	395
20.4. Grenzwerte der Form $\lim_{x \rightarrow x_0} \{f_1(x) \cdot f_2(x)\}$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} \{f_1(x) + f_2(x)\}$ .....	398
20.5. Grenzwerte der Form $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x)^{f_2(x)}$ .....	400
20.6. Übungsaufgaben .....	403
21. Parameterdarstellung von Kurven .....	404
21.1. Einführung der Parameterdarstellung .....	404
21.2. Ableitungen in Parameterdarstellung .....	411
21.3. Die Gleichung der Kurventangente .....	413
21.4. Die Gleichung der Kurvennormalen .....	415
21.5. Übungsaufgaben .....	416
22. Polarkoordinaten .....	416
22.1. Definition und Beispiele .....	416
22.2. Ableitungen in Polarkoordinaten .....	420
22.3. Übungsaufgaben .....	423
23. Untersuchung des Verhaltens von Funktionen .....	424
23.1. Vorbemerkung .....	424
23.2. Bedeutung des Vorzeichens der ersten Ableitung .....	424
23.3. Extrema .....	426
23.4. Bedeutung des Vorzeichens der zweiten Ableitung .....	434
23.5. Wendepunkte .....	436
23.6. Übungsaufgaben .....	441

24. Graphische und numerische Differentiation .....	442
24.1. Graphische Differentiation .....	442
24.2. Numerische Differentiation .....	443
24.3. Übungsaufgaben .....	447
25. Näherungsweise Berechnung von Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$ .....	447
25.1. Iterationsverfahren .....	447
25.2. Das Newtonsche Verfahren .....	454
25.3. Das verallgemeinerte Iterationsverfahren .....	459
25.4. Übungsaufgaben .....	460

#### **IV. Integralrechnung für Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen**

26. Das bestimmte Integral .....	463
26.1. Zur Problemstellung .....	463
26.2. Intervallzerlegungen .....	465
26.3. Definition des bestimmten Integrals .....	466
26.4. Einige Klassen integrierbarer Funktionen .....	472
26.5. Beispiele für die direkte Berechnung bestimmter Integrale .....	473
26.6. Anwendungen des Integralbegriffs in den Naturwissenschaften .....	474
26.6.1. Begriff der Arbeit einer Kraft .....	474
26.6.2. Statisches Moment und Trägheitsmoment einer ebenen homogenen Massenverteilung .....	476
26.6.3. Schwerpunkt einer ebenen homogenen Massenverteilung .....	479
26.7. Übungsaufgaben .....	479
27. Eigenschaften des bestimmten Integrals .....	480
27.1. Eigenschaften, die das Integrationsintervall betreffen .....	480
27.2. Eigenschaften, die den Integranden betreffen .....	481
27.3. Ungleichungen zwischen Integralen .....	482
27.4. Erster Mittelwertsatz der Integralrechnung .....	486
27.5. Übungsaufgaben .....	488
28. Das unbestimmte Integral .....	489
28.1. Das bestimmte Integral als Funktion der oberen Integrationsgrenze .....	489
28.2. Definition des unbestimmten Integrals .....	491
28.3. Zusammenhang mit der Differentialrechnung .....	493
28.4. Übungsaufgaben .....	496
29. Technik des Integrierens .....	496
29.1. Grundintegrale .....	496
29.2. Substitutionsmethode .....	499
29.3. Anwendung der Substitutionsmethode auf bestimmte Integrale .....	503
29.4. Methode der partiellen Integration .....	505
29.5. Rekursionsformeln .....	511
29.6. Übungsaufgaben .....	514
30. Technik des Integrierens (Fortsetzung) .....	516
30.1. Integration der rationalen Funktionen .....	516
30.1.1. Zur Herstellung der Teilbruchzerlegung .....	516
30.1.2. Integrale der Form $\int \frac{Bx + C}{x^2 + px + q} dx$ .....	522
30.1.3. Integrale der Form $\int \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^l} dx; l \in \mathbb{N}, l > 1$ .....	526

30.2. Integration einiger spezieller nicht-rationaler Funktionen .....	527
30.3. Zur Tragweite der Integrationsverfahren .....	533
30.4. Übungsaufgaben .....	534
31. Uneigentliche Integrale .....	534
31.1. Erweiterung des Integralbegriffs .....	534
31.2. Integrale mit unbeschränkten Integranden .....	535
31.3. Integrale über unbeschränkte Integrationsintervalle .....	541
31.4. Zum Rechnen mit uneigentlichen Integralen .....	546
31.5. Hauptwert eines uneigentlichen Integrals .....	547
31.6. Übungsaufgaben .....	548
32. Einige Anwendungen der Integralrechnung auf die ebene Geometrie .....	549
32.1. Flächeninhalt ebener Bereiche .....	549
32.2. Bogenlänge einer ebenen Kurve .....	557
32.3. Krümmung einer ebenen Kurve .....	562
32.4. Übungsaufgaben .....	567
33. Graphische und numerische Integration .....	567
33.1. Graphische Integration .....	567
33.2. Numerische Integration .....	572
33.2.1. Allgemeine Bemerkungen .....	572
33.2.2. Die Formeln von NEWTON-CÔTES .....	573
33.2.3. Spezielle Quadraturformeln .....	575
33.3. Übungsaufgaben .....	582

## V. Reihen

34. Unendliche Reihen .....	583
34.1. Definitionen .....	583
34.2. Unmittelbare Berechnung der Reihensumme $s$ .....	587
34.3. Zwei Konvergenzkriterien .....	588
34.4. Das Rechnen mit unendlichen Reihen .....	590
34.5. Übungsaufgaben .....	591
35. Reihen mit positiven Gliedern .....	591
35.1. Hauptkriterium für Reihen mit positiven Gliedern .....	591
35.2. Vergleichskriterien .....	592
35.3. Quotientenkriterium .....	594
35.4. Wurzelkriterium .....	597
35.5. Übungsaufgaben .....	598
36. Reihen mit beliebigen Gliedern .....	599
36.1. Alternierende Reihen .....	599
36.2. Absolut konvergente Reihen .....	601
36.3. Konvergenzkriterien für absolut konvergente Reihen .....	602
36.4. Unbedingt konvergente Reihen .....	605
36.5. Multiplikation unendlicher Reihen .....	608
36.6. Übungsaufgaben .....	611
37. Funktionenfolgen und Funktionenreihen .....	612
37.1. Definitionen .....	612
37.2. Gleichmäßig konvergente Reihen .....	614

37.3. Gliedweise Integration und Differentiation .....	619
37.4. Übungsaufgaben .....	623
38. Potenzreihen .....	624
38.1. Konvergenzverhalten von Potenzreihen .....	624
38.2. Eigenschaften der Reihensumme $s(x)$ .....	627
38.3. Übungsaufgaben .....	635
39. Taylorsche Formel und Taylorsche Reihe .....	635
39.1. Entwicklung eines Polynoms .....	635
39.2. Taylorsche Formel .....	637
39.3. Taylorsche Reihe .....	640
39.4. Entwicklung der elementaren Funktionen .....	643
39.4.1. Entwicklung der Exponentialfunktion .....	643
39.4.2. Entwicklung der trigonometrischen Funktionen .....	643
39.4.3. Entwicklung der Logarithmusfunktion .....	645
39.4.4. Entwicklung der Funktion $(1+x)^x$ .....	647
39.5. Übungsaufgaben .....	650
40. Anwendung der Taylorschen Formel und Taylorschen Reihe .....	650
40.1. Numerische Berechnung der Funktionswerte elementarer Funktionen .....	650
40.1.1. Zur Problemstellung .....	650
40.1.2. Exponentialfunktion. Berechnung von $e$ .....	651
40.1.3. Trigonometrische Funktionen .....	653
40.1.4. Berechnung von Wurzeln .....	653
40.2. Näherungsformeln .....	655
40.3. Zur Theorie der Extrema und Wendepunkte .....	658
40.4. Übungsaufgaben .....	661
41. FOURIER-Reihen .....	662
41.1. Orthogonalität des trigonometrischen Fundamentalsystems .....	662
41.2. Trigonometrische Reihen und FOURIER-Reihen .....	664
41.3. FOURIER-Reihen für gerade und ungerade Funktionen .....	669
41.4. FOURIER-Reihen in komplexer Form .....	673
41.5. FOURIER-Reihen für Funktionen der Periode $2p$ .....	675
41.6. Zum Konvergenzverhalten von FOURIER-Reihen .....	676
41.7. Summierbarkeit von FOURIER-Reihen .....	679
41.8. Zur numerischen Durchführung der harmonischen Analyse .....	680
41.8.1. Das Verfahren von RUNGE .....	681
41.8.2. Das Verfahren von FISCHER-HINNEN .....	682
41.9. Übungsaufgaben .....	684
42. Orthogonale Funktionensysteme .....	684
42.1. Grundbegriffe und Beispiele .....	684
42.2. FOURIER-Reihen bezüglich eines beliebigen orthogonalen Funktionensystems .....	687
42.3. Vollständige Funktionensysteme .....	692
42.4. Übungsaufgaben .....	697
<b>VI. Anschauliche Vektorrechnung und Analytische Geometrie</b>	
43. Vektorbegriff. Rechnen mit Vektoren .....	699
43.1. Begriff des Vektors .....	699
43.2. Addition und Subtraktion von Vektoren .....	701
43.3. Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar .....	703

43.4. Vorbereitende Betrachtungen zur Multiplikation von Vektoren .....	705
43.4.1. Orientierung einer Ebene .....	705
43.4.2. Rechtssystem .....	705
43.4.3. Winkel zwischen gerichteten Geraden und Winkel zwischen Vektoren ..	706
43.4.4. Orthogonale Vektoren .....	707
43.4.5. Projektion eines Vektors auf eine gerichtete Gerade .....	707
43.5. Zerlegung von Vektoren bezüglich gegebener Richtungen .....	708
43.6. Skalarprodukt .....	710
43.7. Vektorprodukt .....	714
43.8. Übungsaufgaben .....	718
44. Vektorrechnung unter Verwendung eines Koordinatensystems .....	719
44.1. Koordinatensystem .....	719
44.2. Ortsvektoren .....	720
44.3. Komponenten und Koordinaten eines Vektors .....	720
44.4. Rechnen mit Vektoren in Koordinaten-Schreibweise .....	721
44.5. Determinanten .....	725
44.6. Zusammengesetzte Produkte von Vektoren .....	727
44.6.1. Spatprodukt .....	727
44.6.2. Andere zusammengesetzte Produkte .....	731
44.7. Übungsaufgaben .....	733
45. Gerade und Ebene .....	734
45.1. Grundbegriffe .....	734
45.1.1. Richtungskosinus .....	734
45.1.2. Teilverhältnis .....	735
45.1.3. Flächeninhalt und Volumen .....	737
45.1.4. Transformation des Koordinatensystems .....	738
45.2. Gleichung der Geraden .....	741
45.3. Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden .....	748
45.4. Gleichung der Ebene .....	751
45.5. Lagebeziehungen zwischen zwei Ebenen .....	755
45.6. Lagebeziehungen zwischen Ebene und Gerade .....	757
45.7. Übungsaufgaben .....	758
46. Kurven und Flächen zweiter Ordnung .....	761
46.1. Kreis und Kugel .....	761
46.2. Kurven zweiter Ordnung .....	764
46.3. Flächen zweiter Ordnung .....	770
46.3.1. Vorbemerkungen .....	770
46.3.2. Klassifikation der Flächen zweiter Ordnung .....	771
46.3.3. Diskussion der nichtentarteten Flächen zweiter Ordnung .....	774
46.4. Übungsaufgaben .....	777
<b>Lösungen</b> .....	779
<b>Literatur</b> .....	812
<b>Namenverzeichnis</b> .....	814
<b>Sachverzeichnis</b> .....	815