

Inhaltsverzeichnis Topologie I - WS 1993/94

§1. Topologische Räume und stetige Abbildungen

(1.1) Definition	Topologie
(1.2) Bemerkungen + Beispiele	metrischer Raum, (in-)diskrete Topologie
(1.3) Definition	stetige Abbildung
(1.4) Bemerkungen + Beispiele	u.a. Homöomorphismen

§2. Umgebungen, offene Kerne und abgeschlossene Hüllen

(2.1) Definition	Umgebung
(2.2) Bemerkung	Char. der Offenheit durch Umgebungen
(2.3) Satz	Eigenschaften der Menge aller Umgebungen eines Punktes
(2.4) Satz	Mengensysteme mit obigen Eigenschaften definieren eine Topologie
(2.5) Definition	Stetigkeit in einem Punkt
(2.6) Satz	Stetigkeit \Leftrightarrow stetig in jedem Punkt
(2.7) Bemerkungen	Char. abgeschlossener Mengen
(2.8) Definitionen	offener Kern, abgeschlossene Hülle, Rand, Ableitung, Berührungspunkte, Häufungspunkte
(2.9) Bemerkungen	Rechenregeln, alternative Char.
(2.10) Satz	

§3. Erzeugung von Topologien

(3.1) Definitionen	Basis einer Topologie, Umgebungsbasis eines Punktes
(3.2) Bemerkungen + Beispiele	alternative Char. des Basisbegriffs, Basis eines metrischen Raumes
(3.3) Satz	Weitere Char. des Basisbegriffs
(3.4) Corollar	Subbasis
(3.5) Bemerkungen	Vergleich von Topologien
(3.6) Satz	von Abbildungen erzeugte Topologien
(3.7) Beispiele	Spartopologie, Quotiententopologie, Produkttopologie, Box-Topologie

§4. Filter

(4.1) Definition	Filter
(4.2) Bemerkungen + Beispiele	Fréchet-Filter, Elementarfilter einer Folge, Umgebungsfilter eines Punktes
(4.3) Definition	Filterbasis
(4.4) Bemerkungen + Beispiele	alternative Char. des Basisbegriffs, Bildfilter
(4.5) Definition	Vergleich von Filtern, Ultrafilter
(4.6) Bemerkungen + Beispiele	Existenz feinerer Ultrafilter, Char. eines Ultrafilters, Char. der Konvergenz einer Folge mit Filtern

§5. Konvergenz

(5.1) Definition	Limespunkt, Berührungspunkt eines Filters
(5.2) Bemerkungen + Beispiele	u.a. Char. der Stetigkeit mit Hilfe der Filterkonvergenz
(5.3) Definitionen	gerichtete Menge, Netz, Konvergenz von Netzen
(5.4) Bemerkungen + Beispiele	Elementarfilter eines Netzes, Char. der Stetigkeit durch Netze

§6. Trennungsaxiome

(6.1) Definition	T_i -Raum, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, Hausdorffsch, regulär, normal
(6.2) Satz	Implikationen
(6.3) Lemma	Char. von T_1 -Räumen
(6.4) Satz	Char. von T_2 -Räumen
(6.5) Satz	Unterräume, Produkte, Quotienten von T_2 -Räumen
(6.6) Beispiele	
(6.7) Bemerkungen zu (6.6)	
(6.8) Satz	Char. von T_3 - und T_4 -Räumen

§7. Kompakte topologische Räume

(7.1) Satz	Äquivalente Charakterisation der Quasi-Kompaktheit
(7.2) Definition	Kompaktheit
(7.3) Bemerkungen + Beispiele	abgeschlossene Teilmengen kompakter Räume sind kompakt, kompakte Teilmengen von Hausdorff-Räumen sind abgeschlossen, stetige Bilder quasi-kompakter Mengen sind quasi-kompakt
(7.4) Satz von Tychonoff	
(7.5) Lemma	Char. der Konvergenz von Filtern auf Produkträumen
(7.6) Satz	Kompakte Räume sind normal
(7.7) Definition	Kompaktifizierung, Einbettung
(7.8) Bemerkungen	

§8. Lokalkompakte Räume

(8.1) Definition	lokalkompakte Räume
(8.2) Bemerkungen + Beispiele	
(8.3) Satz	Char. über Umgebungsbasen
(8.4) Folgerungen	lokalkompakte Räume sind regulär, offene Unterräume lokalkompakter Räume sind lokalkompakt
(8.5) Satz	Charakterisation der Lokalkompaktheit für Unterräume lokalkompakter Räume
(8.6) Lemma	abgeschlossen Unterräume lokalkompakter Räume sind lokalkompakt
(8.7) Satz	Alexandroff-Kompaktifizierung
(8.8) Beispiele	eigentliche Abbildungen

§9. Zusammenhängende Räume

(9.1) Definition	zusammenhängender Raum
(9.2) Bemerkungen + Beispiele	alternative Char.; topologische Summe; wegzusammenhängende Räume, Beziehungen zwischen zusammenhängend und wegzusammenhängend, stetige Bilder zusammenhängender Räume sind zusammenhängend
(9.3) Satz	Vereinigung zusammenhängender Mengen
(9.4) Bemerkungen	Durchschnitt zusammenhängender Mengen, Zusammenhangskomponenten, totalzusammenhängend
(9.5) Satz	Eigenschaften von Komponenten
(9.6) Bemerkung	Wegzusammenhangskomponente

§10. Lokalzusammenhängende Räume

(10.1) Definition	lokalzusammenhängend, lokalwegzusammenhängend
(10.2) Bemerkungen + Beispiele	
(10.3) Satz	Char. von lokalzusammenhängend und lokalwegzusammenhängend
(10.4) Bemerkungen	Offenheit von Komponenten, Char. von wegzusammenhängend

§11. Abzählbarkeitsaxiome

Definitionen	separabel, abzählbare Umgebungsbasen, abzählbare Topologie, T -kompakt
(11.1) Satz	Implikationen
(11.2) Lemma	Dichtesatz von Baire für \mathbb{R}
(11.3) Satz	Abzählbarkeit im Unendlichen; Definition Lindelöf-Raum
(11.4) Bemerkungen	Räume mit abzählbarer Topologie sind Lindelöf-Räume und separabel, Lindelöf-Räume müssen nicht separabel sein und vice versa, Lindelöf T_3 -Räume sind T_4
(11.5) Satz	für metrisierbare Räume sind die Begriffe "abzählbare Topologie", "Lindelöf" und "separabel" äquivalent
(11.6) Bemerkungen	

§12. Urysohn-Funktionen. Der Fortsetzungssatz von Tietze

(12.1) Definition	TF_i -Raum, $i = 2, 3, 4$, vollständig-Hausdorffsch, vollständig-regulär, Urysohn-Funktion
(12.2) Satz	u.a. Lemma von Urysohn
(12.3) Bemerkungen	u.a. perfekt-normale Räume
(12.4) Satz	Fortsetzungssatz von Tietze
(12.5) Bemerkungen	
(12.6) Lemma	Jeder metrisierbare Raum ist normal
(12.7) Lemma	Jeder Unterraum eines vollständig-regulären Raumes ist vollständig-regulär
(12.8) Corollar	Jeder lokal-kompakte Raum ist vollständig-regulär

Übersichten zu den Trennungseigenschaften

§13. Die Stone-Čech-Kompaktifizierung

(13.1) Satz und Definition	Stone-Čech-Kompaktifizierung
(13.2) Satz (Stone + Čech)	Char. der Stone-Čech-Kompaktifizierung
(13.3) Hilfssatz	
(13.4) Hilfssatz	
(13.5) Satz	Die Stone-Čech-Kompaktifizierung ist die "größte" Kompaktifizierung
(13.6) Bemerkungen + Beispiele	u.a. Abschwächung der charakteristischen Bedingung, Alexandroff-Kompaktifizierung

§14. Ordinal- und Kardinalzahlen

(14.1) Definitionen	Ordnungsbegriffe
(14.2) Bemerkungen + Beispiele	u.a. Auswahlaxiom uws.
(14.3) Definition	Isomorphismus
(14.4) Bemerkung	Isomorphie ist Äquivalenzrelation
(14.5) Definition	Ideal, Initialintervall
(14.6) Bemerkungen	"Rechenregeln" für Ideale und Initialintervalle
(14.7) Lemma	
(14.8) Lemma	
(14.9) Satz	Isomorphiebeziehungen zwischen zwei wohlgeordneten Mengen
(14.10) Bemerkungen + Beispiele	u.a. transfiniten Induktion und Konstruktion
(14.11) Definition	Ordinalzahl
(14.12) Satz	Eigenschaften von Ordinalzahlen
(14.13) Theorem	u.a. Zuordnung von Ordinalzahlen zu wohlgeordneten Mengen
(14.14) Bemerkungen	Aufbau der Klasse der Ordinalzahlen
(14.15) Definition	Gleichmächtigkeit
(14.16) Bemerkungen + Beispiele	u.a. Initialordinalzahl einer Mächtigkeitsklasse
(14.17) Definition	Kardinalzahl
(14.18) Bemerkungen + Beispiele	u.a. Satz von Bernstein-Schröder, $n < \aleph_0 < c$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $ X < \mathfrak{P}(X) $ für alle Mengen X , Continuumshypothese
(14.19) Bemerkungen	zur Arithmetik von Kardinalzahlen
(14.20) Bemerkungen	zu Ordinalräumen
(14.21) Beispiele	$[0, \Omega]$ ist die Stone-Čech-Kompaktifizierung von $[0, \Omega]$, $ \mathbb{N} = 2^c$

§15. Parakompakte Räume und Metrisationssätze

(15.1) Definition	lokal-endliche und σ -lokal-endliche Familien
(15.2) Definition	parakompakt
(15.3) Satz (Michael)	äquivalente Kriterien für Parakompaktheit für reguläre Räume
Hilfssatz	$(A_i)_{i \in I}$ lokal-endliche Familie $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} \overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$
(15.4) Satz (A.H. Stone)	Metrische Räume sind parakompakt
(15.5) Bemerkungen + Beispiele	Zusammenhänge zwischen kompakt, parakompakt, metrisierbar und normal

(15.6) Bemerkung	Teilung der Eins
(15.7) Satz	Metrisationssatz von Bing, Nagata und Smirnov
(15.8) Corollar	
(15.9) Satz	Produkt Räume metrisierbarer Räume
(15.10) Satz	Erster Metrisationssatz von Urysohn
(15.11) Satz	Zweiter Metrisationssatz von Urysohn

§16. Uniforme Räume

(16.1) Definition	<i>Diagonale, Spiegelung einer Menge an der Diagonalen, symmetrische Menge, \circ-Produkt von Mengen</i>
(16.2) Bemerkungen + Beispiel	Rechenregeln
(16.3) Definition	uniforme Struktur, Nachbarschaft, benachbart von der Ordnung
(16.4) Bemerkungen + Beispiele	äquivalente Definitionsmöglichkeit für uniforme Strukturen, Basis
(16.5) Lemma	Metriken induzieren uniforme Strukturen
(16.6) Satz	Jede <i>uniforme</i> Struktur induziert eine Topologie
(16.7) Bemerkungen + Beispiele	
(16.8) Satz	Hausdorffsch \Leftrightarrow die <i>uniforme</i> Struktur ist separiert
(16.9) Definition	uniformisierbar
(16.10) Satz	Kriterium für Uniformisierbarkeit; \circ . Beweis
(16.11) Bemerkung	<i>kompakte Räume sind uniformisierbar</i>
(16.12) Definition	gleichmäßig stetig
(16.13) Bemerkungen + Beispiele	
(16.14) Satz	äquivalente Bedingung für gleichmäßige Stetigkeit
(16.15) Corollar	Verknüpfung gleichmäßig stetiger Abbildungen
(16.16) Satz	<i>eine stetige Abbildung auf einem kompakten, uniformen Raum ist gleichmäßig stetig</i>
(16.17) Definition	Cauchyfilter
(16.18) Bemerkungen	Cauchyfolge im metrischen Raum induziert einen Cauchyfilter
(16.19) Satz	Jeder konvergente Filter ist Cauchyfilter
(16.20) Satz	der Bildfilter eines Cauchyfilters unter einer gleichmäßigen stetigen Abbildung ist ein Cauchyfilter
(16.21) Definition	vollständiger uniformer Raum
(16.22) Bemerkungen	zur Vollständigkeit
(16.23) Beispiele	Topologie der punktweisen Konvergenz, Topologie der gleichmäßigen Konvergenz

§17. Topologische Gruppen

(17.1) Definition	topologische Gruppe
(17.2) Bemerkungen + Beispiele	alternative Char.
(17.3) Lemma	einige Homöomorphismen
(17.4) Lemma	top Gruppe ist homogener Raum
(17.5) Satz	Eigenschaften des Umgebungsfilters des neutralen Elements
(17.6) Satz	jede topologische Gruppe ist uniformisierbar
(17.7) Lemma	zur Ungleichheit von \mathfrak{U}_L und \mathfrak{U}_R
(17.8) Beispiel	
(17.9) Lemma	topologische Gruppe ist T_3 -Raum, und $T_2 \Leftrightarrow T_1 \Leftrightarrow T_0$.

§18. Mannigfaltigkeiten

(18.1) Definitionen	Top. M., C^p -Atlas, C^p -Struktur, differenzierbare M. der Klasse C^p , Differenzierbarkeit von Funktionen und Abbildungen, komplexe M.
(18.2) Beispiele + Bemerkungen	Sphäre, reell-projektiver Raum
(18.3) Definitionen	n -dimensionales reelles Vektorbündel, n -dimensionales C^p -Vektorbündel, triviales Bündel
(18.4) Beispiele	Produktbündel, Tangentialbündel einer Mannigfaltigkeit

Übungsaufgaben**Index**