Inhaltsverzeichnis

Kapitel I. σ-Algebren und Borelsche Mengen 1

§ 1. Das Inhaltsproblem und das Maßproblem 1

§ 2. Bezeichnungen und mengentheoretische Grundlagen 6
1. Bezeichnungen 6
2. Limes superior und Limes inferior 8
Aufgaben 10

§ 3. Ringe, Algebren, σ-Ringe und σ-Algebren 11
1. Ringstruktur von $\mathfrak{P}(X)$ 11
2. Ringe und Algebren 12
3. σ-Ringe und σ-Algebren 14
Aufgaben 15

§ 4. Erzeuger und Borelsche Mengen 16
1. Erzeuger 16
2. Borelsche Mengen 18
3. Verhalten unter Abbildungen 20
Aufgaben 20

§ 5. Halbringe 21
1. Halbringe 21
2. Der von einem Halbring erzeugte Ring 22
Aufgaben 23

§ 6. Monotone Klassen und Dynkin-Systeme 23
1. Monotone Klassen 23
2. Dynkin-Systeme 25
Aufgaben 27

Kapitel II. Inhalte und Maße 29

§ 1. Inhalte, Prämaße und Maße 29
1. Definitionen und erste Folgerungen 29
2. Ein erster Fortsetzungssatz 32
3. Eigenschaften von Inhalten 33
4. Charakterisierung der σ-Additivität 34
5. Historische Anmerkungen 35
Aufgaben 36

§ 2. Inhalte und Prämaße auf $\mathbb{R}$ 39
1. Endliche Inhalte auf $\mathfrak{I}$ 39
2. Endliche Prämaße auf $\mathfrak{I}$ 40
3. Kurzbiographie von É. BOREL 43
Aufgaben 45

§ 3. Inhalte und Prämaße auf $\mathbb{R}^p$ 45
1. Das Lebesguesche Prämaß auf $\mathfrak{I}^p$ 46
2. Differenzenoperatoren 46
3. Inhalte auf $\mathfrak{I}^p$ 49
4. Prämaße auf $\mathfrak{I}^p$ 51
5. Kurzbiographie von J. RADON 52
Aufgaben 53

§ 4. Fortsetzung von Prämaßen zu Maßen 54
1. Äußere Maße 54
2. Der Fortsetzungssatz 57
3. Die Lebesgue-messbaren Teilmengen des $\mathbb{R}^p$ 59
4. Kurzbiographie von C. CARATHÉODORY 61
Aufgaben 62

§ 5. Eindeutigkeit der Fortsetzung 63
1. σ-endliche Inhalte 63
2. Der Eindeutigkeitssatz 64
3. Wahrscheinlichkeitsmaße und Verteilungsfunktionen auf $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^p$ 66
Aufgaben 69

§ 6. Vollständige Maßräume 70
Aufgaben 72

§ 7. Das Lebesguesche Maß 73
1. Approximationssätze 73
2. Charakterisierung der Lebesgue-Messbarkeit 74
3. Der Satz von H. STEINHAUS 75
4. Messbarkeit konvexer Mengen 75
Aufgaben 76

§ 8. Das Cantorsche Diskontinuum 78
1. Konstruktion von C 78
2. Triadische Entwicklung 79
3. Mächtigkeiten von $\mathfrak{B}^p$ und $\mathfrak{L}^p$ 81
4. Die Cantorsche Funktion 82
Aufgaben 84

§ 9. Metrische äußere Maße und Hausdorff-Maße 85
1. Metrische äußere Maße 85
2. Hausdorff-Maße 87
3. Rektifizierbare Kurven 87
4. Kurzbiographie von F. HAUSDORFF 90
Aufgaben 92

Kapitel III. Messbare Funktionen 93

§ 1. Messbare Abbildungen und Bildmaße 96
1. Messbare Abbildungen 96
2. Bildmaße 98
Aufgaben 98

§ 2. Bewegungsinvarianz des Lebesgue-Maßes 99
1. Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes 99
2. Das Bildmaß des Lebesgue-Maßes unter bijektiven affinen Abbildungen 101
3. Bewegungsinvarianz des Lebesgue-Maßes 103
4. Das p-dimensionale äußere Hausdorff-Maß 106
Aufgaben 107

§ 3. Existenz nicht messbarer Mengen 109
1. Nicht Lebesgue-messbare Mengen und Unlösbarkeit des Maßproblems 109
2. Kurzbiographie von G. VITALI 112
3. Weitere Beispiele nicht Lebesgue-messbarer Mengen 112
4. Existenz nicht messbarer Mengen für Lebesgue-Stieltjessche Maße 113
Aufgaben 116

§ 4. Messbare numerische Funktionen 117
1. Rechnen in $\overline{\mathbb{R}}$, Topologie von $\overline{\mathbb{R}}$ 117
2. Messbare numerische Funktionen 118
3. Approximation durch Treppenfunktionen 121
4. Abzählbar erzeugte Messräume 122
5. Ein minimaler Erzeuger von $\mathfrak{B}^1$ 123
Aufgaben 124

§ 5. Produkt-σ-Algebren 126
1. Initial-σ-Algebren und Produkt-σ-Algebren 126
2. Borel-Mengen topologischer Produkte 129
3. Messbarkeit der Diagonalen 130
Aufgaben 131

Kapitel IV. Das Lebesgue-Integral 133

§ 1. Integration von Treppenfunktionen 134
Aufgaben 135

§ 2. Integration nicht-negativer messbarer Funktionen 136
1. Definition des Integrals 136
2. Der Satz von der monotonen Konvergenz 139
3. Kurzbiographie von B. LEVI 140
4. Maße mit Dichten 141
Aufgaben 141

§ 3. Integrierbare Funktionen 142
1. Integrierbare Funktionen 142
2. Linearität und Monotonie des Integrals 145
3. Der Raum $\mathcal{L}^1$ 146
4. Stetige Funktionen mit kompaktem Träger 147
5. Integration über messbare Teilmengen 149
6. Historische Anmerkungen 150
7. Kurzbiographie von W.H. YOUNG 152
Aufgaben 153

§ 4. Fast überall bestehende Eigenschaften 155
Aufgaben 157

§ 5. Konvergenzsätze 158
1. Das Lemma von FATOU 159
2. Kurzbiographie von P. FATOU 159
3. Der Satz von der majorisierten Konvergenz 160
4. Von einem Parameter abhängige Integrale 162
5. Der Satz von SCHEFFÉ 164
Aufgaben 165

§ 6. Riemann-Integral und Lebesgue-Integral 166
1. Eigentliches Riemann-Integral und Lebesgue-Integral 166
2. Uneigentliches Riemann-Integral und Lebesgue-Integral 168
3. Mittelwertsätze der Integralrechnung 171
4. Kurzbiographie von H. LEBESGUE 172
Aufgaben 175

Kapitel V. Produktmaße, Satz von FUBINI *und Transformationsformel* 179

§ 1. Produktmaße 179
1. Produkt-σ-Algebren 180
2. Produktmaße 180
3. Das Cavalierische Prinzip 186
4. Produkte endlich vieler Maßräume 187
5. Das p-dimensionale äußere Hausdorff-Maß 188
Aufgaben 190

§ 2. Der Satz von FUBINI 192
1. Der Satz von FUBINI 192
2. Historische Anmerkungen 197
3. Beispiele für Anwendungen des Satzes von FUBINI 199
4. Der Gaußsche Integralsatz für die Ebene 202
5. Kurzbiographien von G. FUBINI und L. TONELLI 205
Aufgaben 206

§ 3. Faltung und Fourier-Transformation 209
1. Integration in Bezug auf Bildmaße 209
2. Transformation von Maßen mit Dichten 210
3. Die Faltung auf $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^p, \mathfrak{B}^p, \beta^p)$ 211
4. Die Fourier-Transformation 213
Aufgaben 218

§ 4. Die Transformationsformel 219
1. Die Transformationsformel 220
2. Der Satz von SARD 227
3. Verallgemeinerte Transformationsformel 229
4. Transformation von Maßen mit Dichten bez. λ^p 229
5. Der Brouwersche Fixpunktsatz 231
Aufgaben 235

Kapitel VI. Konvergenzbegriffe der Maß- und Integrationstheorie 239

§ 1. Die Ungleichungen von JENSEN, HÖLDER und MINKOWSKI 240
1. Die Jensensche Ungleichung 240
2. Die Höldersche Ungleichung 243
3. Die Minkowskische Ungleichung 244
4. Historische Anmerkungen 245
Aufgaben 246

§ 2. Die Räume L^p und der Satz von RIESZ-FISCHER 249
1. Die Räume $\mathcal{L}^p$ und L^p 249
2. Der Satz von RIESZ-FISCHER 251
3. Die Banach-Algebra $L^1(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}^n, \beta^n)$ 254
4. Der Hilbert-Raum $L^2(\mu)$ 255
5. Der Banach-Verband $L^p_{\mathbb{R}}$ 260
6. Dichte Unterräume von L^p 262
7. Der Satz von PLANCHEREL 264
8. Der Satz von FATOU über Potenzreihen 264
9. Historische Anmerkungen 265
10. Kurzbiographien von F. RIESZ und E. FISCHER 266
Aufgaben 268

§ 3. Der Satz von JEGOROW 270
1. Konvergenz μ-fast überall 270
2. Fast gleichmäßige Konvergenz 272
3. Kurzbiographie von D.F. JEGOROW 273
Aufgaben 273

§ 4. Konvergenz nach Maß 274
1. Konvergenz nach Maß und lokal nach Maß 274
2. Cauchy-Folgen für die Konvergenz nach Maß 276
3. Vergleich der Konvergenzbegriffe 277
4. Charakterisierung der Konvergenz n.M. und der Konvergenz lokal n.M. 278
Aufgaben 279

§ 5. Konvergenz in $\mathcal{L}^p$ 280
1. Der Satz von PRATT 280
2. Konvergenz in $\mathcal{L}^p$ 282
3. Der Konvergenzsatz von VITALI 282
4. Schwache Konvergenz in $\mathcal{L}^p$ 284
Aufgaben 288

Kapitel VII. Absolute Stetigkeit 291

§ 1. Signierte Maße; Hahnscher und Jordanscher Zerlegungssatz 291
1. Signierte Maße 291
2. Der Hahnsche Zerlegungssatz 293
3. Positive Variation, negative Variation und Variation 294
4. Jordanscher Zerlegungssatz 295
5. Der Banach-Verband der endlichen signierten Maße 296
6. Kurzbiographie von H. HAHN 297
Aufgaben 299

§ 2. Der Satz von RADON-NIKODÝM und der Lebesguesche Zerlegungssatz 301
1. Absolute Stetigkeit 301
2. Der Satz von RADON-NIKODÝM 302
3. Kurzbiographie von O. NIKODÝM 306
4. Der Lebesguesche Zerlegungssatz 307
Aufgaben 309

§ 3. Der Dualraum von L^p $(1 \leq p < \infty)$ 310
1. Der Dualraum von $L^p(\mu)$ $(1 \leq p < \infty)$ 310
2. Die multiplikativen Linearformen auf der Banach-Algebra $L^1(\mu_m)$ 315
Aufgaben 317

§ 4. Absolut stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$ 319
1. Der Überdeckungssatz von VITALI 319
2. Differenzierbarkeit monotoner Funktionen λ-f.ü. 320
3. Der Dichtesatz 324
4. Absolut stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$ 324
5. Lebesguesche Zerlegung Lebesgue-Stieltjesscher Maße 329
6. Rektifizierbare Kurven 331
Aufgaben 332

Kapitel VIII. Maße auf topologischen Räumen 335

§ 1. Borel-Maße, Radon-Maße, Regularität 336
1. Grundbegriffe 336
2. Regularitätssätze 340
3. Moderate Borel-Maße 341
4. Regularität von Borel-Maßen 342
5. Regularität von Borel-Maßen auf polnischen Räumen 343
6. Der Satz von LUSIN 346
7. Kurzbiographie von N.N. LUSIN 348
Aufgaben 350

§ 2. Der Darstellungssatz von F. RIESZ 351
1. Problemstellung 351
2. Fortsetzungssatz 353
3. Der Darstellungssatz von F. RIESZ für lokal-kompakte Räume 358
4. Der Darstellungssatz von F. RIESZ für vollständig reguläre Räume 362
5. Träger von Maßen 366
6. Der Darstellungssatz von F. RIESZ für stetige Linearformen auf $C_0(X)$ 369
7. Ein dichter Unterraum von $L^p(X)$ 373
Aufgaben 374

§ 3. Das Haarsche Maß 376
1. Topologische Gruppen 376
2. Linksinvariante Linearformen und Maße 378
3. Existenz und Eindeutigkeit des Haarschen Maßes 380
4. Anwendungen des Haar-Maßes 390
5. Invariante und relativ invariante Maße auf Restklassenräumen 393
6. Kurzbiographie von A. HAAR 400
Aufgaben 401

§ 4. Schwache Konvergenz und schwache Kompaktheit 403
1. Eine Regularitätseigenschaft endlicher Maße auf metrischen Räumen 404
2. Schwache und vage Konvergenz von Folgen von Maßen 405
3. Das Portmanteau-Theorem 409
4. Schwache Konvergenz von Verteilungsfunktionen und die Sätze von HELLY-BRAY und HELLY 411
5. Der Satz von PROCHOROV 417
6. Die Laplace-Transformation 423
7. Die Prochorov-Metrik 426
Aufgaben 432

Anhang A. Topologische Räume 435

Anhang B. Transfinite Induktion 441

Literaturverzeichnis 443

Namenverzeichnis 451

Symbolverzeichnis 457

Sachverzeichnis 458