

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Ein Beispiel aus der Gruppentheorie . . . . .	2
1.2	Ein Beispiel aus der Theorie der Äquivalenzrelationen . . . . .	4
1.3	Eine erste Analyse . . . . .	5
1.4	Ausblick . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Syntax der Sprachen erster Stufe</b>	<b>9</b>
2.1	Alphabete . . . . .	9
2.2	Das Alphabet einer Sprache erster Stufe . . . . .	12
2.3	Terme und Ausdrücke in Sprachen erster Stufe . . . . .	13
2.4	Induktion im Term- und im Ausdruckskalkül . . . . .	17
2.5	Freie Variablen und Sätze . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Semantik der Sprachen erster Stufe</b>	<b>27</b>
3.1	Strukturen und Interpretationen . . . . .	28
3.2	Eine Normierung der umgangssprachlichen Junktoren . . . . .	31
3.3	Die Modellbeziehung . . . . .	33
3.4	Die Folgerungsbeziehung . . . . .	34
3.5	Zwei Lemmata über die Modellbeziehung . . . . .	41
3.6	Einige einfache Symbolisierungen . . . . .	46
3.7	Fragen zur Symbolisierbarkeit . . . . .	50
3.8	Substitution . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Ein Sequenzenkalkül</b>	<b>61</b>
4.1	Sequenzenregeln . . . . .	62
4.2	Grund- und Junktorenregeln . . . . .	64
4.3	Ableitbare Junktorenregeln . . . . .	66
4.4	Quantoren- und Gleichheitsregeln . . . . .	68
4.5	Weitere ableitbare Regeln . . . . .	70
4.6	Eine Zusammenfassung. Ein Beispiel . . . . .	72
4.7	Widerspruchsfreiheit . . . . .	74

<b>5</b>	<b>Der Vollständigkeitssatz</b>	<b>79</b>
5.1	Der Satz von Henkin . . . . .	79
5.2	Erfüllbarkeit widerspruchsfreier Ausdrucksmengen (abzählbarer Fall) . . . . .	84
5.3	Erfüllbarkeit widerspruchsfreier Ausdrucksmengen (allgemeiner Fall) . . . . .	87
5.4	Der Vollständigkeitssatz . . . . .	90
<b>6</b>	<b>Der Satz von Löwenheim und Skolem und der Endlichkeitssatz</b>	<b>91</b>
6.1	Der Satz von Löwenheim und Skolem . . . . .	91
6.2	Der Endlichkeitssatz . . . . .	93
6.3	Elementare Klassen . . . . .	95
6.4	Elementar äquivalente Strukturen . . . . .	99
<b>7</b>	<b>Zur Tragweite der ersten Stufe</b>	<b>105</b>
7.1	Der formale Beweisbegriff . . . . .	106
7.2	Mathematik im Rahmen der ersten Stufe . . . . .	109
7.3	Das Zermelo-Fraenkelsche Axiomensystem der Mengenlehre . . . . .	114
7.4	Bemerkungen zum mengentheoretischen Aufbau der Mathematik	119
<b>8</b>	<b>Syntaktische Interpretationen und Normalformen</b>	<b>123</b>
8.1	Termreduzierte Ausdrücke und relationale Symbolmengen . . . . .	123
8.2	Syntaktische Interpretationen . . . . .	126
8.3	Definitionserweiterungen . . . . .	134
8.4	Normalformen . . . . .	137
<b>9</b>	<b>Erweiterungen der Logik erster Stufe</b>	<b>145</b>
9.1	Die Logik zweiter Stufe . . . . .	146
9.2	Das System $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ . . . . .	151
9.3	Das System $\mathcal{L}_Q$ . . . . .	157
<b>10</b>	<b>Berechenbarkeit und ihre Grenzen</b>	<b>159</b>
10.1	Entscheidbarkeit, Aufzählbarkeit, Berechenbarkeit . . . . .	160
10.2	Registermaschinen . . . . .	166
10.3	Das Halteproblem für Registermaschinen . . . . .	172
10.4	Die Unentscheidbarkeit der Logik erster Stufe . . . . .	177
10.5	Der Satz von Trachtenbrot und die Unvollständigkeit der Logik zweiter Stufe . . . . .	181
10.6	Theorien und die Unentscheidbarkeit der Arithmetik . . . . .	184
10.7	Selbstbezügliche Aussagen und die Gödelschen Unvollständigkeitssätze . . . . .	192

10.8 Die Entscheidbarkeit der Presburger-Arithmetik . . . . .	199
10.9 Die Entscheidbarkeit der schwachen monadischen Nachfolger-Arithmetik . . . . .	206
<b>11 Freie Modelle und Logik-Programmierung</b>	<b>225</b>
11.1 Der Satz von Herbrand . . . . .	226
11.2 Freie Modelle und universelle Horn-Ausdrücke . . . . .	229
11.3 Herbrand-Strukturen . . . . .	235
11.4 Aussagenlogik . . . . .	238
11.5 Aussagenlogische Resolution . . . . .	244
11.6 Resolution in der ersten Stufe (ohne Unifikation) . . . . .	256
11.7 Logik-Programmierung . . . . .	265
<b>12 Eine algebraische Charakterisierung der elementaren Äquivalenz</b>	<b>281</b>
12.1 Endliche und partielle Isomorphie . . . . .	282
12.2 Der Satz von Fraïssé . . . . .	288
12.3 Der Beweis des Satzes von Fraïssé . . . . .	290
12.4 Ehrenfeucht-Spiele . . . . .	297
<b>13 Die Sätze von Lindström</b>	<b>299</b>
13.1 Logische Systeme . . . . .	299
13.2 Reguläre logische Systeme mit Endlichkeitssatz . . . . .	303
13.3 Der erste Satz von Lindström . . . . .	304
13.4 Der zweite Satz von Lindström . . . . .	311
<b>Lösungshinweise zu den Aufgaben</b>	<b>317</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>351</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>355</b>
<b>Sach- und Personenverzeichnis</b>	<b>359</b>