

# Inhalt

**Vorwort — V**

**Überblick — 1**

**1 Lineare Gleichungssysteme — 3**

1.1 Auflösung gestaffelter Systeme — 4

1.2 Gaußsche Eliminationsmethode — 6

1.3 Pivot-Strategien und Nachiteration — 8

1.4 Cholesky-Verfahren für symmetrische, positiv definite Matrizen — 15

Übungsaufgaben — 17

**2 Fehleranalyse — 23**

2.1 Fehlerquellen — 23

2.2 Kondition eines Problems — 25

2.2.1 Normweise Konditionsanalyse — 27

2.2.2 Komponentenweise Konditionsanalyse — 33

2.3 Stabilität eines Algorithmus — 36

2.3.1 Stabilitätskonzepte — 37

2.3.2 Vorwärtsanalyse — 38

2.3.3 Rückwärtsanalyse — 43

2.4 Anwendung auf lineare Gleichungssysteme — 45

2.4.1 Lösbarkeit unter der Lupe — 45

2.4.2 Rückwärtsanalyse der Gauß-Elimination — 47

2.4.3 Beurteilung von Näherungslösungen — 50

Übungsaufgaben — 53

**3 Lineare Ausgleichsprobleme — 59**

3.1 Gaußsche Methode der kleinsten Fehlerquadrate — 59

3.1.1 Problemstellung — 59

3.1.2 Normalgleichungen — 62

3.1.3 Kondition — 64

3.1.4 Lösung der Normalgleichungen — 67

3.2 Orthogonalisierungsverfahren — 68

3.2.1 Givens-Rotationen — 70

3.2.2 Householder-Reflexionen — 72

3.3 Verallgemeinerte Inverse — 75

Übungsaufgaben — 79

<b>4</b>	<b>Nichtlineare Gleichungssysteme und Ausgleichsprobleme</b>	<b>83</b>
4.1	Fixpunktiteration	83
4.2	Newton-Verfahren für nichtlineare Gleichungssysteme	87
4.3	Gauß-Newton-Verfahren für nichtlineare Ausgleichsprobleme	94
4.4	Parameterabhängige nichtlineare Gleichungssysteme	101
4.4.1	Lösungsstruktur	101
4.4.2	Fortsetzungsmethoden	103
	Übungsaufgaben	115
<b>5</b>	<b>Lineare Eigenwertprobleme</b>	<b>119</b>
5.1	Kondition des allgemeinen Eigenwertproblems	120
5.2	Vektoriteration	122
5.3	QR-Algorithmus für symmetrische Eigenwertprobleme	125
5.4	Singulärwertzerlegung	131
5.5	Stochastische Eigenwertprobleme	136
5.5.1	Perron-Frobenius-Theorie	137
5.5.2	Fastentkoppelte Markov-Ketten	142
5.5.3	Prinzip der Google-Suchmaschine	147
	Übungsaufgaben	149
<b>6</b>	<b>Drei-Term-Rekursionen</b>	<b>155</b>
6.1	Theoretische Grundlagen	156
6.1.1	Orthogonalität und Drei-Term-Rekursionen	156
6.1.2	Homogene und inhomogene Rekursionen	160
6.2	Numerische Aspekte	162
6.2.1	Kondition	164
6.2.2	Idee des Miller-Algorithmus	169
6.3	Adjungierte Summation	171
6.3.1	Summation von dominanten Lösungen	172
6.3.2	Summation von Minimallösungen	176
	Übungsaufgaben	179
<b>7</b>	<b>Interpolation und Approximation</b>	<b>183</b>
7.1	Theoretische Grundlagen	184
7.1.1	Eindeutigkeit und Kondition	184
7.1.2	Approximationsfehler der Interpolation	187
7.1.3	Minimax-Eigenschaft der Tschebyscheff-Polynome	188
7.1.4	Hermite-Interpolation	191
7.2	Algorithmen zur Polynom-Interpolation	193
7.2.1	Monomiale Basis: klassische Auswertung	193
7.2.2	Lagrange-Basis: schnellste Auswertung	194
7.2.3	Newton-Basis: dividierte Differenzen	196

- 7.3        Trigonometrische Interpolation — 203
- 7.4        Bézier-Technik — 209
- 7.4.1     Bernstein-Polynome und Bézier-Darstellung — 210
- 7.4.2     Algorithmus von de Casteljau — 216
- 7.5        Spline-Interpolation — 223
- 7.5.1     Kubische Spline-Interpolation: theoretische Herleitung — 223
- 7.5.2     Kubische Spline-Interpolation: Algorithmus — 226
- 7.5.3     Allgemeinere Splineräume — 228
- 7.5.4     B-Splines — 231
- Übungsaufgaben — 236
  
- 8        Große symmetrische Gleichungssysteme und Eigenwertprobleme — 241**
- 8.1        Klassische Iterationsverfahren — 242
- 8.2        Tschebyscheff-Beschleunigung — 248
- 8.3        Verfahren der konjugierten Gradienten — 252
- 8.4        Vorkonditionierung — 259
- 8.5        Lanczos-Methoden — 265
- Übungsaufgaben — 269
  
- 9        Bestimmte Integrale — 273**
- 9.1        Quadraturformeln — 274
- 9.2        Newton-Cotes-Formeln — 277
- 9.3        Gauß-Christoffel-Quadratur — 282
- 9.3.1     Konstruktion der Quadraturformeln — 283
- 9.3.2     Berechnung der Knoten und Gewichte — 288
- 9.4        Klassische Romberg-Quadratur — 290
- 9.4.1     Asymptotische Entwicklung der Trapezsumme — 290
- 9.4.2     Idee der Extrapolation — 292
- 9.4.3     Details des Algorithmus — 298
- 9.5        Adaptive Romberg-Quadratur — 301
- 9.5.1     Adaptives Prinzip — 302
- 9.5.2     Schätzung des Approximationsfehlers — 304
- 9.5.3     Herleitung des Algorithmus — 306
- 9.6        Schwierige Integranden — 312
- 9.7        Adaptive Mehrgitter-Quadratur — 315
- 9.7.1     Lokale Fehlerschätzung und Verfeinerungsregeln — 316
- 9.7.2     Globale Fehlerschätzung und Details des Algorithmus — 320
- 9.8        Monte-Carlo-Quadratur für hochdimensionale Integrale — 322
- 9.8.1     Verwerfungsmethode — 324
- 9.8.2     Markov-Ketten-Monte-Carlo-Methoden — 326
- 9.8.3     Konvergenzgeschwindigkeit — 328
- Übungsaufgaben — 330

**XII — Inhalt**

**Software — 335**

**Literatur — 337**

**Stichwortverzeichnis — 343**