

INHALT

1. Abschnitt: Ergänzungen zur Logik

| | |
|--|----|
| § 1 Die Negation | 9 |
| I. Grundbegriffe der Aussagenlogik S. 9; II. Die Definition der Negation S. 10; III. Die Negation von Gleichungen und Ungleichungen S. 11; IV. Grundlegende Eigenschaften der Negation S. 11; V. Die Negation von konjunktiven Aussagen und Aussageformen S. 13; VI. Die Negation von disjunktiven Aussagen und Aussageformen S. 13; Übungen und Aufgaben S. 14 | |
| § 2 Die Subjunktion und die Bijunktion | 16 |
| I. Die Subjunktion S. 16; II. Die Bijunktion S. 18; Übungen und Aufgaben S. 19 | |
| § 3 Allaussagen und Existenzaussagen | 20 |
| I. Allaussagen und Existenzaussagen als verallgemeinerte konjunktive und disjunktive Aussagen S. 20; II. Die Negation von Allaussagen S. 22; III. Die Negation von Existenzaussagen S. 23; IV. Der Zusammenhang zwischen Subjunktion und Folgerungsbegriff S. 24; V. Der Zusammenhang zwischen Bijunktion und Äquivalenzbegriff S. 24; VI. Notwendige und hinreichende Bedingungen S. 25; Übungen und Aufgaben S. 26 | |

2. Abschnitt: Ergänzungen zur Zahlenlehre und zur Funktionslehre

| | |
|--|----|
| § 4 Die sogenannte vollständige Induktion | 28 |
| I. Das deduktive und das induktive Verfahren S. 28; II. Beweisverfahren der Mathematik S. 29; III. Das Verfahren der sogenannten vollständigen Induktion S. 31; IV. Mengentheoretische Begründung des Satzes von der vollständigen Induktion S. 34; V. Der binomische Lehrsatz S. 35; Übungen und Aufgaben S. 38 | |
| § 5 Zum Funktionsbegriff | 41 |
| I. Zweistellige Relationen S. 41; II. Funktionale Relationen, Abbildungen, Funktionen S. 42; Übungen und Aufgaben S. 44 | |
| § 6 Zu den reellen Zahlen | 45 |
| I. Intervallschachtelungen und reelle Zahlen S. 45; II. Zum Begriff des Betrages einer Zahl S. 46; III. Der Begriff der Umgebung einer Zahl S. 47; Übungen und Aufgaben S. 48 | |

3. Abschnitt: Zahlenfolgen

| | |
|---|----|
| § 7 Zahlenfolgen | 50 |
| I. Zahlenfolgen als spezielle Funktionen S. 50; II. Graphische Darstellung von Zahlenfolgen S. 53; III. Zusammenstellung von speziellen Zahlenfolgen S. 53; Übungen und Aufgaben S. 54 | |
| § 8 Grundlegende Eigenschaften von Zahlenfolgen | 55 |
| I. Monotone Zahlenfolgen S. 55; II. Beschränkte und unbeschränkte Zahlenfolgen S. 57; III. Folgerungen und Umkehrfolgerungen bei Ungleichungen S. 60; IV. Ein Satz über beschränkte Zahlenfolgen S. 63; Übungen und Aufgaben S. 66 | |
| § 9 Die Konvergenz von Zahlenfolgen. Der Begriff des Grenzwertes | 68 |
| I. Definition des Grenzwertbegriffes bei Zahlenfolgen S. 68; II. Beispiele für Konvergenzbeweise S. 71; III. Sätze über konvergente Zahlenfolgen S. 76; IV. Intervallschachtelungen S. 77; V. Divergente Zahlenfolgen S. 79; Übungen und Aufgaben S. 81 | |
| § 10 Grenzwertsätze für Zahlenfolgen | 84 |
| I. Hinführung zu den Grenzwertsätzen S. 84; II. Summen- und Differenzfolgen S. 85; III. Produktfolgen S. 86; IV. Quotientenfolgen S. 87; Übungen und Aufgaben S. 89 | |

| | |
|--|-----|
| § 11 Häufungswerte | 91 |
| I. Definition des Begriffs „Häufungswert“ S. 91; II. Der Satz von Bolzano-Weierstraß S. 92; Übungen und Aufgaben S. 94 | |
| 4. Abschnitt: Spezielle Folgen und Reihen | |
| § 12 Arithmetische Folgen und Reihen | 95 |
| I. Arithmetische Zahlenfolgen S. 95; II. Eigenschaften arithmetischer Zahlenfolgen S. 96; III. Die endliche arithmetische Reihe S. 97; IV. Berechnungen bei arithmetischen Folgen und Reihen S. 99; Übungen und Aufgaben S. 100 | |
| § 13 Geometrische Folgen und Reihen | 101 |
| I. Geometrische Zahlenfolgen S. 101; II. Eigenschaften geometrischer Folgen S. 103; III. Die endliche geometrische Reihe S. 105; IV. Berechnungen bei geometrischen Folgen und Reihen S. 106; Übungen und Aufgaben S. 107 | |
| § 14 Zinseszins- und Rentenrechnung | 109 |
| I. Zinseszins bei jährlicher Verzinsung S. 109; II. Diskontieren, Barwert, Effektivzinssatz S. 110; III. Zinseszins bei anderen Verzinsungszeiträumen S. 111; IV. Anwendung auf Wachstumsvorgänge. Stetige Verzinsung, natürliches Wachstum S. 111; V. Rentenrechnung S. 112; Übungen und Aufgaben S. 114 | |
| § 15 Unendliche geometrische Reihen | 116 |
| I. Der Begriff der unendlichen Reihe S. 116; II. Unendliche geometrische Reihen S. 118; III. Periodische Dezimalzahlen S. 120; Übungen und Aufgaben S. 121 | |
| 5. Abschnitt: Grenzwerte und Stetigkeit bei Funktionen | |
| § 16 Eigenschaften von Funktionen | 123 |
| I. Grundlegende Eigenschaften von Funktionen S. 123; II. Klassifikation von Funktionen S. 126; III. Einige besondere Funktionen S. 128; Übungen und Aufgaben S. 129 | |
| § 17 Grenzwerte von Funktionen | 132 |
| I. Der Begriff des Grenzwertes einer Funktion für $x \rightarrow \infty$ bzw. für $x \rightarrow -\infty$ S. 132; II. Der Begriff des Grenzwertes einer Funktion an einer Stelle x_0 S. 135; III. Rechtsseitige und linksseitige Grenzwerte S. 140; IV. Uneigentliche Grenzwerte S. 142; V. Grenzwertsätze S. 143; Übungen und Aufgaben S. 145 | |
| § 18 Der Begriff der Stetigkeit | 147 |
| I. Die Definition des Begriffs der Stetigkeit S. 147; II. Die Stetigkeit einer Funktion über einem Intervall S. 151; III. Definitionslücken S. 153; IV. Sätze über stetige Funktionen S. 155; Übungen und Aufgaben S. 158 | |
| § 19 Stetige Funktionen | 161 |
| I. Die Stetigkeit rationaler Funktionen S. 161; II. Die Stetigkeit der Funktion zu $f(x) = \sqrt{x}$ S. 162; III. Die Stetigkeit der trigonometrischen Funktionen S. 163; IV. Verkettung stetiger Funktionen S. 164; Übungen und Aufgaben S. 166 | |
| 6. Abschnitt: Einführung in die Differentialrechnung | |
| § 20 Der Begriff der Ableitung einer Funktion | 167 |
| I. Die Problemstellung S. 167; II. Die Definition der Begriffe Ableitung und Differenzierbarkeit S. 168; III. Beispiele S. 171; IV. Der Begriff der Tangente S. 172; V. Der Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit S. 173; Übungen und Aufgaben S. 175 | |
| § 21 Ableitungsfunktionen, Ableitungsterme | 177 |
| I. Differenzierbarkeit über einem Intervall S. 177; II. Grundlegende Regeln zur Berechnung von Ableitungstermen S. 178; III. Ableitungen höherer Ordnung S. 180; Übungen und Aufgaben S. 181 | |

| | |
|--|-----|
| § 22 Regeln zur Berechnung von Ableitungstermen | 182 |
| I. Die Produktregel S. 182; II. Die Quotientenregel S. 185; III. Die Kettenregel S. 188; Übungen und Aufgaben S. 191 | |
| § 23 Extremwerte. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung | 194 |
| I. Der Begriff des lokalen Extremums S. 194; II. Der Satz von Rolle S. 196; III. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung S. 197; IV. Anwendungen des Mittelwertsatzes S. 198; Übungen und Aufgaben S. 199 | |
| § 24 Diskussion von Funktionen mit Hilfe von Ableitungen | 200 |
| I. Kriterien für die Monotonie differenzierbarer Funktionen S. 200; II. Ein hinreichendes Kriterium für lokale Extrema S. 203; III. Rechts- und Linkskrümmung von Kurven S. 205; IV. Hinreichende Kriterien für lokale Extrema S. 207; V. Wendepunkte S. 209; Übungen und Aufgaben S. 212 | |
| § 25 Die Diskussion der ganzen rationalen Funktionen .. | 213 |
| I. Grundlegende Eigenschaften S. 213; II. Die Nullstellen von ganzen rationalen Funktionen S. 215; III. Beispiel für die Diskussion einer ganzen rationalen Funktion S. 217; Übungen und Aufgaben S. 218 | |
| § 26 Die Diskussion der gebrochenen rationalen Funktionen | 219 |
| I. Grundlegende Eigenschaften S. 219; II. Asymptoten S. 221; III. Extrempunkte und Wendepunkte S. 222; IV. Beispiel für die Diskussion einer gebrochenen rationalen Funktion S. 223; Übungen und Aufgaben S. 224 | |
| § 27 Extremwerte | 225 |
| I. Problemstellung und Beispiele S. 225; II. Zusammenfassung S. 227; Übungen und Aufgaben S. 227 | |
| § 28 Der Begriff des Differentials. Fehlerrechnung | 230 |
| I. Näherungen durch Linearisieren S. 230; II. Der Begriff des Differentials S. 231; III. Der Differentialquotient und die Ableitung S. 233; IV. Das Verfahren der linearen Annäherung S. 234; V. Fehlerabschätzung und Fehlerfortpflanzung S. 235; Übungen und Aufgaben S. 236 | |
| § 29 Der Ableitungsbegriff in der Physik | 239 |
| I. Der Begriff der Momentangeschwindigkeit S. 239; II. Der Begriff der Beschleunigung S. 240; III. Das Temperaturgefälle längs eines Stabes S. 241; Übungen und Aufgaben S. 241 | |
| 7. Abschnitt: Einführung in die Integralrechnung | |
| § 30 Hinführung zum Begriff des bestimmten Integrals | 245 |
| I. Einleitung S. 245; II. Zum Problem der Flächenmessung S. 246; III. Erstes Beispiel eines bestimmten Integrals S. 248; IV. Zweites Beispiel für ein bestimmtes Integral S. 250; Übungen und Aufgaben S. 251 | |
| § 31 Das bestimmte Integral | 253 |
| I. Allgemeine Definition des Begriffs des bestimmten Integrals S. 253; II. Beispiele für die Berechnung bestimmter Integrale S. 256; III. Die Integrierbarkeit der in einem Intervall monotonen und beschränkten Funktionen S. 257; IV. Integrierbare Funktionen S. 259; V. Integrationsregeln S. 261; VI. Der Mittelwertsatz der Integralrechnung S. 263; Übungen und Aufgaben S. 265 | |
| § 32 Der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung | 267 |
| I. Das Integral als Funktion der oberen Grenze (Die Integralfunktion) S. 267; II. Der erste Hauptsatz der Infinitesimalrechnung S. 268; III. Der Begriff der Stammfunktion S. 270; IV. Der zweite Hauptsatz der Infinitesimalrechnung S. 272; Übungen und Aufgaben S. 275 | |

| | |
|---|-----|
| § 33 Integrationsmethoden | 276 |
| I. Der Begriff des sogenannten „unbestimmten Integrals“ S. 276; II. Grundintegrale S.278; III. Einfache Integrationsregeln S. 279; IV. Die Substitutionsregel S. 280; V. Das Verfahren der partiellen Integration S. 283; Übungen und Aufgaben S. 285 | |
| § 34 Anwendungen der Integralrechnung in der Geometrie | 290 |
| I. Flächenberechnung mit bestimmten Integralen S. 290; II. Beispiel für die Berechnung eines Volumens S. 293; III. Das Volumen von Rotationskörpern S. 295; Übungen und Aufgaben S. 297 | |
| § 35 Anwendungen der Integralrechnung in der Physik | 303 |
| I. Der physikalische Begriff der Arbeit S. 303; II. Der Schwerpunkt von Flächen S. 306; III. Die Guldinsche Regel S. 308; IV. Der Schwerpunkt von Rotationskörpern S. 309; V. Trägheitsmomente S. 310; Übungen und Aufgaben S. 311 | |
| 8. Abschnitt: Beweisverfahren der Mathematik | |
| § 36 Der direkte Beweis | 314 |
| I. Beweis durch Spezialisierung S. 314; II. Die Abtrennungsregel S. 316; III. Die Einsetzungsregel und die Ersetzungsregel S. 317 | |
| § 37 Der indirekte Beweis | 318 |
| I. Beispiel eines indirekten Beweises S. 318; II. Logische Grundlagen des indirekten Beweises S. 319; III. Beispiele indirekter Beweise S. 319; IV. Der „modus tollens“ S. 321 | |
| Anhang: Zusammenstellung grundlegender Definitionen und grundlegender Sätze | 323 |
| I. Grundbegriffe der Mengenlehre S.323; II. Aussageformen, Folgerungs- und Äquivalenzbegriff S. 323; III. Das Rechnen mit reellen Zahlen S. 324; IV. Die Ordnung und Anordnung reeller Zahlen S. 326 | |
| Sachregister | 327 |