

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	9
1.1 Kurzer historischer Überblick	9
1.2 Vorgehensweise bei der FEM	11
1.3 Verschiedene Elementtypen	11
1.4 Beispiele zur Finite-Element-Methode	17
1.4.1 Beispiel zu linearen Problemen	17
1.4.2 Beispiel zu nichtlinearen Problemen	18
1.4.3 Strukturoptimierung	19
2. Mathematische Grundlagen	23
2.1 Schreibweisen	23
2.2 Vektoren	24
2.2.1 Definition eines n-dimensionalen Vektors	24
2.2.2 Rechenregeln	24
2.3 Matrizen	24
2.3.1 Definition einer Matrix	24
2.3.2 Rechenregeln	25
2.3.3 Transponierte Matrix	26
2.3.4 Orthogonale Matrix	27
2.3.5 Lineare Transformation	27
2.3.6 Dyade (Tensor zweiter Stufe)	29
2.4 Funktionale	30
2.4.1 Diskretisierung des Funktionals	31
2.5 Ableitung von Vektoren	33
2.6 Dreieckskoordinaten	34
2.6.1 Integration über das Dreieck	35
3. Beschreibung elastostatischer Probleme	37
3.1 Differentialgleichung	38
3.2 Prinzip virtueller Verrückungen	39
3.2.1 Euler-Lagrang'sche Gleichung	40
3.2.2 Integration des Funktionals	41
3.3 Die Methode von Ritz	42

4. Stabelemente	45
4.1 Der eindimensionale Stab	45
4.1.1 Verschiebungsansatz	46
4.1.2 Dehnung	47
4.1.3 Stoffgesetz (Hook'sches Gesetz)	47
4.1.4 Funktional	48
4.1.5 Variation des Funktionals	48
4.2 Beispiel zum eindimensionalen Stab	50
4.2.1 Direkte Erstellung der Gesamtsteifigkeitsmatrix	55
4.3 Erstellung der Gesamtsteifigkeitsmatrix (allgemein)	57
4.4 Der zweidimensionale Stab	59
4.5 Beispiel zum zweidimensionalen Stab	62
4.6 Übungsaufgabe : Zweidimensionales Stabproblem	67
5. Balkenelemente	69
5.1 Das Balkenelement (1D)	69
5.1.1 Problemdefinition	69
5.1.2 Dehnungen und Spannungen im Balken	70
5.1.3 Funktional des Balkenproblems	71
5.1.4 Formfunktionen des eindimensionalen Balkens	72
5.1.5 Diskretisierung des Funktionals	75
5.1.6 Variation des diskretisierten Funktionals	76
5.1.7 Bilden der Steifigkeitsmatrix	77
5.1.8 Diskretisierung der Streckenlast	78
5.1.9 Schnittgrößen des Balkenelementes	80
5.2 Beispiel zum Balken (1D)	83
5.3 Übungsaufgabe : Höhere Anzahl Balkenelemente	87
5.4 Übungsaufgabe : Eindimensionaler Balken	87
5.5 Aufgabe : Balkenelement mit Gelenk	88
5.6 Der elastisch gelagerte Balken	89
5.6.1 Beispiel zum elastisch gelagerten Balken	92
5.7 Balkenelement (2D)	97
5.7.1 Freiheitsgrade des 2D-Balkens	97
5.7.2 Überlagerung der Dehnungen von Stab und Balken	98
5.7.3 Steifigkeitsmatrix	99
5.7.4 Transformation der Steifigkeitsmatrix	101
5.7.5 Steifigkeitsmatrix im globalen System	102
5.8 Beispiel Balken (2D)	105
5.9 Übungsaufgabe : Balkensystem	111
5.10 Übungsaufgabe : Stab-Balkenproblem	112
5.11 Übungsaufgabe : Winkel als Balkenproblem	113

6. Scheibenproblem	115
6.1 Problemdefinition	115
6.2 Spannungen und Dehnungen in der Scheibe	116
6.3 Belastungen der Scheibe	117
6.4 Das Funktional des Scheibenproblems	118
6.5 Diskretisierung des Funktionals	118
6.5.1 Formfunktionen des Dreieckselementes	118
6.5.2 Formfunktion in Dreieckskoordinaten	123
6.6 Variation des diskretisierten Funktionals	124
6.6.1 Diskretisierung der Volumenkräfte	126
6.6.2 Diskretisierung der Streckenlasten	129
6.7 Spannungsberechnung in der Scheibe	131
6.8 Beispiel zum Scheibenproblem	132
6.9 Übungsaufgabe : Scheibenproblem I	140
6.10 Übungsaufgabe : Scheibenproblem II	141
7. Wärmeleitung	143
7.1 Feldprobleme	143
7.2 Problemdefinition	143
7.2.1 Randbedingungen bei der Wärmeleitung	144
7.3 Funktional des Wärmeleitungsproblems	145
7.4 Diskretisierung des Funktionals	146
7.4.1 Wärmeleitung	147
7.4.2 Innere Wärmequellen	150
7.4.3 Wärmeübergang auf den Rändern	151
7.4.4 Konvektionsmatrix \underline{K}_k	151
7.4.5 Wärmeübergangsvektor	153
7.5 Variation des Funktionals	154
7.6 Beispiel zur Wärmeleitung	156
7.7 Übungsaufgabe : Wärmeleitungsproblem I	162
7.8 Übungsaufgabe : Wärmeleitungsproblem II	163
8. Lösungen zu den Übungsbeispielen	165
8.1 Lösung : Zweidimensionales Stabproblem	165
8.2 Lösung : Höhere Anzahl Balkenelemente	169
8.3 Lösung : Eindimensionaler Balken	175
8.4 Lösung : Balkenelement mit Gelenk	178
8.5 Lösung : Balkensystem	183
8.6 Lösung : Stab-Balkenproblem	187
8.7 Lösung : Winkel als Balkenproblem	191
8.8 Lösung : Scheibenproblem I	193
8.9 Lösung : Scheibenproblem II	196
8.10 Lösung : Wärmeleitungsproblem I	199

8.11 Lösung : Wärmeleitungsproblem II	203
A. Verwendete Formelzeichen und Symbole	207
B. Grundgleichungen der Elastizitätstheorie	213
Bilderverzeichnis	215
Literaturverzeichnis	217
Index	221