

3.5.1	Das Prinzip für dreidimensionale Kontinua, Scheiben und Dehnstäbe	65
3.5.2	Das Prinzip für Balken und Platten	65
3.6	Übertragung des Prinzips der virtuellen Verrückungen auf die Wärmeleitungsaufgabe	69
3.6.1	Grundgleichungen der Wärmeleitung	70
3.6.2	Das Prinzip der virtuellen Temperatur	73
3.6.3	Analogie zwischen den Grundgleichungen der Wärmeleitung und den Grundgleichungen der Strukturmechanik	74
3.7	Übungsaufgaben	76
4	Verfahren der finiten Elemente für Scheibentragwerke und Fachwerke	81
4.1	Ein Verfahren der finiten Elemente für Scheibentragwerke	81
4.1.1	Vorbemerkung: Globale oder lokal begrenzte Ansätze	82
4.1.2	Verschiebungsansatz für ein Rechteckelement	84
4.1.3	Diskretisierung des Prinzips der virtuellen Verrückungen durch Einführung des Verschiebungsansatzes	87
4.1.4	Ermittlung der Steifigkeitsmatrix und der Lastvektoren für Rechteckelemente	91
4.1.5	Aufbau und Lösen des Gleichungssystems	99
4.1.6	Berechnung der Schnittkräfte und der Formänderungsenergie	103
4.1.7	Anschauliche Interpretation	105
4.1.8	Zusammenfassung	110
4.1.9	Einfache Beispielrechnung	114
4.1.10	Verbesserte Schnittkraftberechnung	124
4.2	Mechanisch begründete Anforderungen an ein Finite-Elemente-Verfahren	128
4.2.1	Stetigkeit des Verschiebungsansatzes	129
4.2.2	Darstellbarkeit von Starrkörperverschiebungszuständen	130
4.2.3	Darstellbarkeit konstanter Verzerrungszustände	132
4.2.4	Symmetrie der Steifigkeitsmatrix	135
4.2.5	Positive Definitheit der Steifigkeitsmatrix	136
4.2.6	Kriterien für die Wahl von Ansatzfunktionen	138
4.2.7	Überprüfung der Matrizen des 4-Knoten-Rechteckelementes	139
4.3	Ein Verfahren der finiten Elemente für Fachwerke	142
4.3.1	Elementierung	143
4.3.2	Das Prinzip der virtuellen Verrückungen	144
4.3.3	1. Schritt: Festlegung des Elementtyps	144
4.3.4	2. Schritt: Differentiation des Verschiebungsansatzes	146
4.3.5	3. Schritt: Auswertung der Elementintegrale	146
4.3.6	4. Schritt: Aufbau der Systemmatrizen	147
4.3.7	5. Schritt: Lösen des Gleichungssystems	148
4.3.8	6. Schritt: Berechnung der Schnittkräfte	149
4.3.9	Ermittlung des exakten Verschiebungsansatzes	150
4.3.10	Beispielrechnung	152

3.5.1	Das Prinzip für dreidimensionale Kontinua, Scheiben und Dehnstäbe .	65
3.5.2	Das Prinzip für Balken und Platten . . . . .	65
3.6	Übertragung des Prinzips der virtuellen Verrückungen auf die Wärmeleitungs- aufgabe . . . . .	69
3.6.1	Grundgleichungen der Wärmeleitung . . . . .	70
3.6.2	Das Prinzip der virtuellen Temperatur . . . . .	73
3.6.3	Analogie zwischen den Grundgleichungen der Wärmeleitung und den Grundgleichungen der Strukturmechanik . . . . .	74
3.7	Übungsaufgaben . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Verfahren der finiten Elemente für Scheibentragwerke und Fachwerke</b>	<b>81</b>
4.1	Ein Verfahren der finiten Elemente für Scheibentragwerke . . . . .	81
4.1.1	Vorbemerkung: Globale oder lokal begrenzte Ansätze . . . . .	82
4.1.2	Verschiebungsansatz für ein Rechteckelement . . . . .	84
4.1.3	Diskretisierung des Prinzips der virtuellen Verrückungen durch Ein- führung des Verschiebungsansatzes . . . . .	87
4.1.4	Ermittlung der Steifigkeitsmatrix und der Lastvektoren für Rechteck- elemente . . . . .	91
4.1.5	Aufbau und Lösen des Gleichungssystems . . . . .	99
4.1.6	Berechnung der Schnittkräfte und der Formänderungsenergie . . . . .	103
4.1.7	Anschauliche Interpretation . . . . .	105
4.1.8	Zusammenfassung . . . . .	110
4.1.9	Einfache Beispielrechnung . . . . .	114
4.1.10	Verbesserte Schnittkraftberechnung . . . . .	124
4.2	Mechanisch begründete Anforderungen an ein Finite-Elemente-Verfahren . . .	128
4.2.1	Stetigkeit des Verschiebungsansatzes . . . . .	129
4.2.2	Darstellbarkeit von Starrkörperverschiebungszuständen . . . . .	130
4.2.3	Darstellbarkeit konstanter Verzerrungszustände . . . . .	132
4.2.4	Symmetrie der Steifigkeitsmatrix . . . . .	135
4.2.5	Positive Definitheit der Steifigkeitsmatrix . . . . .	136
4.2.6	Kriterien für die Wahl von Ansatzfunktionen . . . . .	138
4.2.7	Überprüfung der Matrizen des 4-Knoten-Rechteckelementes . . . . .	139
4.3	Ein Verfahren der finiten Elemente für Fachwerke . . . . .	142
4.3.1	Elementierung . . . . .	143
4.3.2	Das Prinzip der virtuellen Verrückungen . . . . .	144
4.3.3	1. Schritt: Festlegung des Elementtyps . . . . .	144
4.3.4	2. Schritt: Differentiation des Verschiebungsansatzes . . . . .	146
4.3.5	3. Schritt: Auswertung der Elementintegrale . . . . .	146
4.3.6	4. Schritt: Aufbau der Systemmatrizen . . . . .	147
4.3.7	5. Schritt: Lösen des Gleichungssystems . . . . .	148
4.3.8	6. Schritt: Berechnung der Schnittkräfte . . . . .	149
4.3.9	Ermittlung des exakten Verschiebungsansatzes . . . . .	150
4.3.10	Beispielrechnung . . . . .	152

4.3.11 Erweiterung auf räumliche Fachwerke .....	152
4.4 Übungsaufgaben .....	154
<b>5 Umsetzung des Verfahrens zu einem Finite-Elemente-Programm ...</b>	<b>161</b>
5.1 Dateneingabe und Ergebnisausgabe .....	161
5.2 Einbau der Elementmatrizen in die Systemmatrix .....	164
5.3 Einbau der Verschiebungsrandbedingungen in die Systemmatrizen .....	169
5.4 Direkter Aufbau der Matrizen des gefesselten Systems .....	171
5.5 Lösen des Gleichungssystems .....	172
5.6 Übungsaufgaben .....	179
<b>6 Zur Klassifikation von Elementen und Ansatzfunktionen .....</b>	<b>182</b>
<b>7 Ansatzfunktionen für Elemente vom Scheibentyp .....</b>	<b>189</b>
7.1 Einleitung .....	189
7.2 Ansatzfunktionen für Rechteckelemente durch Produktbildung .....	190
7.3 Ansatzfunktionen für Randpunkt- und Übergangselemente .....	198
7.3.1 Formfunktionen für Randpunktelemente .....	199
7.3.2 Entwicklung der Steifigkeitsmatrix von Randpunktelementen .....	207
7.3.3 Formfunktionen für Übergangselemente .....	208
7.4 Schiefwinklige und krummlinig berandete Elemente .....	211
7.4.1 Einleitung .....	211
7.4.2 Abbildungsvorschriften zur Approximation der Elementgeometrie ...	213
7.4.3 Einführung des Verschiebungsansatzes .....	215
7.4.4 Transformation des Differentialoperators und des Bereichsdifferentials	218
7.4.5 Aufbau von Elementmatrizen und -vektoren .....	220
7.4.6 Anmerkungen zur numerischen Integration und zur programmtech-	
nischen Umsetzung .....	222
7.5 Ansatzfunktionen für Dreieckelemente .....	225
7.5.1 Dreieckskoordinaten .....	225
7.5.2 Formfunktionen für gradlinig berandete Dreieckelemente .....	227
7.5.3 Transformation des Differentialoperators und des Flächendifferentials	230
7.5.4 Integration .....	231
7.5.5 Krummlinig berandete Dreieckelemente .....	232
7.6 Anmerkungen zu inkompatiblen Ansätzen .....	233
7.7 Übungsaufgaben .....	236
<b>8 Numerische Probleme .....</b>	<b>241</b>
8.1 Hinweise für den Einsatz krummlinig berandeter Elemente .....	241
8.1.1 Lage der Knoten .....	241
8.1.2 Ordnung der numerischen Integration .....	245
8.2 Kontrollalgorithmen für Element- und Systemmatrizen .....	250

8.3 Genauigkeit und Konvergenzverhalten .....	253
8.3.1 Definition von Begriffen .....	254
8.3.2 Zum Schrankencharakter von Energiegrößen .....	256
8.3.3 Fehlerquellen .....	258
8.3.4 Ein einfacher Konvergenzbeweis .....	262
8.4 Richardson-Extrapolation .....	271
8.5 Beispielrechnungen .....	274
8.5.1 Scheibenstreifen unter periodischer, treppenförmiger Randschubbelastung .....	274
8.5.2 Kragplatte unter Rand- und Flächenlasten .....	276
8.6 Einige praktische Schlußfolgerungen aus den Untersuchungen zum Genauigkeits- und Konvergenzverhalten .....	282
8.7 Übungsaufgaben .....	284
<b>9 Finite Elemente für Balken und Platten .....</b>	<b>286</b>
9.1 Vorbemerkung .....	286
9.2 Forderungen an Balken- und Plattenelemente .....	288
9.3 Elemente für schubstarre Balken und Platten .....	291
9.3.1 Hermite-Ansätze für Balkenelemente .....	291
9.3.2 Ein kompatibles Plattenrechteckelement .....	294
9.3.3 Zwei Plattenrechteckelemente mit 12 Freiheitsgraden .....	298
9.3.4 Einige Bemerkungen zu isoparametrischen Viereckelementen für schubstarre Platten .....	301
9.3.5 Dreieckelemente für schubstarre Platten .....	303
9.3.6 Schlußfolgerungen .....	311
9.4 Elemente für schubweiche Balken und Platten .....	313
9.4.1 Elemente für schubweiche Balken .....	314
9.4.2 Viereckelemente für schubweiche Platten .....	323
9.5 Verwendung von isoparametrischen Scheiben- und Volumenelementen für Balken- und Plattenstrukturen .....	327
9.6 Zusammenfassender Vergleich der Elemente für die Behandlung von Biegestrukturen .....	330
9.7 Übungsaufgaben .....	332
<b>10 Theorie 2. Ordnung, Stabilität, Schwingungen .....</b>	<b>334</b>
10.1 Vorbemerkung .....	334
10.2 Das Prinzip der virtuellen Verrückungen nach Theorie 2. Ordnung für Balken .....	335
10.2.1 Nichtlineare Formulierung des Prinzips der virtuellen Verrückungen .....	336
10.2.2 Lineare Formulierung des Prinzips der virtuellen Verrückungen ..	339
10.3 Das Prinzip der virtuellen Verrückungen nach Theorie 2. Ordnung für Platten .....	342
10.4 Das Prinzip der virtuellen Verrückungen für dynamische Probleme .....	343

10.5	Berücksichtigung von Dämpfung im Stoffgesetz .....	347
10.6	Einige numerische Ergebnisse zum Beulen und Schwingen von Platten ..	350
10.6.1	Plattenbeulen .....	351
10.6.2	Plattenschwingungen .....	355
10.6.3	Ausnutzung der Symmetrie bei Rechnungen nach Theorie 2. Ordnung .....	358
10.7	Übungsaufgaben .....	359
<b>11</b>	<b>Ein Verfahren der finiten Elemente für ebene Rahmentragwerke ..</b>	<b>361</b>
11.1	Elementierung .....	362
11.2	Das Prinzip der virtuellen Verrückungen für statische Probleme nach Theorie 1. und 2. Ordnung .....	363
11.3	Matrizen des schubweichen Stabelementes .....	363
11.4	Aufbau der Systemmatrizen .....	365
11.5	Berechnung der Verschiebungen und der Schnittkräfte an den Elementenden .....	367
11.6	Zustandsgrößen im Element .....	369
11.6.1	Zustandsgrößen bei einer statischen Rechnung nach Theorie 1. Ordnung .....	369
11.6.2	Zustandsgrößen bei einer statischen Rechnung nach Theorie 2. Ordnung .....	371
11.7	Beispielrechnungen .....	373
11.8	Übungsaufgaben .....	378
<b>12</b>	<b>Ein kombiniertes Verfahren für rotationssymmetrische Flächentragwerke .....</b>	<b>381</b>
12.1	Problemdefinition .....	381
12.2	Voraussetzungen und Grundgedanken des Verfahrens .....	383
12.3	Differentialgleichungsformulierung und Prinzipformulierung .....	385
12.4	Ausnutzung der Rotationssymmetrie .....	388
12.5	Numerische Integration des homogenen Differentialgleichungssystems im statischen Fall .....	390
12.6	Teilinversion zur Steifigkeitsmatrix und Ermittlung von Einheitsverschiebungszuständen .....	391
12.7	Ermittlung der Massenmatrix und des Belastungsvektors mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen .....	393
12.8	Aufbau des Gleichungssystems .....	394
12.9	Einige Ergebnisse .....	395
12.10	Schlußfolgerungen .....	399
12.11	Übungsaufgaben .....	400
<b>13</b>	<b>Anhang .....</b>	<b>401</b>
13.1	Einige Bemerkungen zu den Integralsätzen .....	401

13.1.1 Greenscher Satz .....	401
13.1.2 Integralsatz für die Scheibe .....	402
13.2 Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften .....	404
13.3 Übungsaufgaben .....	415
<b>Symbole und Bezeichnungen .....</b>	<b>419</b>
<b>Literatur .....</b>	<b>428</b>
<b>Sachverzeichnis .....</b>	<b>439</b>