

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b> .....	1
<b>1 Flexibler Umgang mit Brüchen</b> .....	9
1.1 Didaktische Rekonstruktion als integrierendes Forschungsprogramm .....	10
1.1.1 Lernen aus konstruktivistischer Sicht .....	10
1.1.2 Individuelle Vorstellungen und ihre Bedeutung.....	10
1.1.3 Auf Vorstellungen aufbauen – Didaktische Rekonstruktion.....	13
1.2 Zusammenhänge von Teil, Anteil und Ganzem erfassen .....	18
1.2.1 Grundvorstellungen als präskriptive fachliche Vorstellungen.....	19
1.2.2 Komplexität der Grundvorstellungen: Brüche und Operationen.....	22
1.2.3 Bruch als Teil eines Ganzen – Bruch als Relativer Anteil.....	25
1.2.4 Erweitern, Kürzen und Addieren.....	27
1.3 Schwierigkeiten beim Umgang mit Brüchen .....	30
1.3.1 Schwierigkeiten in verschiedenen Ebenen und Schichten .....	31
1.3.2 Ausgewählte Befunde zu intuitiven Gesetzen und Regeln.....	33
1.3.3 Ausgewählte Befunde zu individuellen Vorstellungen.....	34
1.3.4 Zusammenhänge zwischen verschiedenen Schichten .....	36
1.4 Flexibel mit Brüchen umgehen – Grundlegung .....	37
1.4.1 Flexibilität und flexible Strategien.....	38
1.4.2 Im Fokus: Zusammenhänge von Teil, Anteil und Ganzem .....	39
1.5 Mit verschiedenen Ganzen arbeiten.....	41
1.5.1 Die Bedeutung des Ganzen als Bezugsgröße.....	41
1.5.2 Mit verschiedenen Qualitäten des Ganzen arbeiten .....	42
1.5.3 Schwierigkeiten mit dem Ganzen .....	47
1.6 Einheiten bilden und umbilden .....	48

1.6.1 Multiplikatives Denken und multiplikative Situationen.....	48
1.6.2 Einheiten nutzen: Bilden und Umbilden von Einheiten .....	51
1.7 Verschiedene Konstellationen bewältigen.....	54
1.7.1 Drei Konstellationen als Ausdruck von Zusammenhängen.....	54
1.7.2 Teil eines Ganzen – Realisierung in drei Konstellationen.....	56
1.7.3 Relativer Anteil – Realisierung in drei Konstellationen.....	58
1.7.4 Flexibel mit Konstellationen umgehen .....	59
1.7.5 Zusammenhänge in und zwischen Konstellationen .....	61
1.8 Operative Vorgehensweisen nutzen.....	62
1.8.1 Aufgabeninitiierte operative Vorgehensweisen .....	62
1.8.2 Selbstinitiierte operative Vorgehensweisen.....	68
1.9 Forschungsfragen zum flexiblen Umgang mit Brüchen.....	71
<b>2 Hintergrund und Realisierung des Forschungsdesigns .....</b>	<b>75</b>
2.1 Methodologische Vorüberlegungen zur empirischen Erfassung individueller Vorstellungen .....	75
2.1.1 Produkt- und Prozessperspektive .....	76
2.1.2 Quantitative und qualitative Forschungsansätze und ihre Kombination .....	77
2.1.3 Qualitätskriterien empirischer Forschung .....	81
2.2 Design im Modell der Didaktischen Rekonstruktion.....	82
2.3 Realisierung der Interviewstudie (Phasen IV-VI).....	85
2.3.1 Design der Interviewstudie .....	85
2.3.2 Interviewstudie: Rahmenbedingungen und Durchführung .....	88
2.4 Realisierung der Paper-Pencil-Test-Studie (Phasen VII-IX).....	90
2.4.1 Design der Paper-Pencil-Test-Studie .....	90
2.4.2 Paper-Pencil-Test-Studie: Rahmenbedingungen und Durchführung.....	92

2.5 Datenauswahl für die vertiefte Analyse .....	92
2.5.1 Auswahl der Interviewepisoden für die vertiefte Analyse.....	93
2.5.2 Auswahl der Test-Items für die vertiefte Analyse .....	97
2.6 Sachanalysen der vertieft ausgewerteten Aufgaben .....	99
2.6.1 Einzeichnen bzw. Ablesen von Anteilen bzw. Teilen im Kreis .....	99
2.6.2 Bestimmen des Teils bzw. des Ganzen für Mengen .....	103
2.6.3 Zeichnerisches Ergänzen eines flächigen Teils zum Ganzen (Quadrat).....	113
2.6.4 Zeichnerisches Ergänzen eines flächigen Teils zum Ganzen (Dreieck).....	119
2.7 Datenanalyse.....	120
2.7.1 Methodologische Überlegungen .....	121
2.7.2 Verschränkung der Interviewdaten und der Testdaten.....	123
2.7.3 Analyse der Interviewstudie.....	124
2.7.4 Analyse der Paper-Pencil-Test-Studie .....	125
2.7.5 Verortung der vertieft analysierten Daten in den Kapiteln 3 bis 8 ...	128
<b>3 Warum der Blick auf den flexiblen Umgang mit Brüchen?</b>	
– <b>Eine Vorstudie</b> .....	129
3.1 Ausgangspunkt.....	130
3.2 Design und Forschungsfragen.....	130
3.3 Fallbeispiel eines ausgewählten Prozesses.....	131
3.4 Diskussion der empirischen Befunde.....	142
<b>4 Quantitative Überblicksauswertung des schriftlichen Tests</b> .....	145
4.1 Quantitativer Überblick in vier Stufen.....	145
4.1.1 Stufe 1: Gesamtpunktzahlen .....	145
4.1.2 Stufe 2: Punkteverteilung nach Aufgaben.....	148

4.1.3 Stufe 3: Punkteverteilung nach Konstellationen .....	149
4.1.4 Stufe 4: Punkteverteilung nach Items für die Konstellationen.....	151
4.1.5 Zusammenfassung der quantitativen Überblicksanalyse.....	155
4.2 Voraborientierung zu den Kapiteln 5 bis 8.....	156
<b>5 Vorstellungen und Strukturierungen beim Bestimmen des Teils.....</b>	<b>157</b>
5.1 Konkretisierung der übergeordneten Forschungsfragen .....	157
5.2 Analysen der schriftlichen Produkte zum Bestimmen des Teils (kontinuierliches Ganzes) .....	158
5.2.1 Auflistung der Codierung der Lösungen für die Items 1a und 1b ....	159
5.2.2 Ergebnisse und Interpretation .....	161
5.3 Analysen der schriftlichen Produkte zum Bestimmen des Teils (diskretes Ganzes).....	169
5.3.1 Auflistung der Codierung der Rechenwege und Bilder für Item 2a.	170
5.3.2 Ergebnisse und Interpretation .....	175
5.4 Diskussion der empirischen Befunde.....	186
<b>6 Vorstellungen und Strukturierungen beim Bestimmen des Anteils.....</b>	<b>193</b>
6.1 Konkretisierung der übergeordneten Forschungsfragen .....	193
6.2 Analysen der schriftlichen Produkte zum Bestimmen des Anteils.....	194
6.2.1 Auflistung der Codierung der Lösungen für Item 1c .....	194
6.2.2 Ergebnisse und Interpretation .....	196
6.3 Diskussion der empirischen Befunde.....	203
<b>7 Vorstellungen und Strukturierungen beim Bestimmen des Ganzen .....</b>	<b>207</b>
7.1 Konkretisierung der übergeordneten Forschungsfragen .....	207
7.2 Analysen der schriftlichen Produkte zum Bestimmen des Ganzen (diskreter Teil).....	208

7.2.1 Auflistung der Codierung der Rechenwege und Bilder für die Items 2b und 2c.....	209
7.2.2 Ergebnisse und Interpretation zu Item 2b und 2c.....	215
7.3 Analysen der Prozesse zum Bestimmen des Ganzen (diskreter Teil).....	224
7.3.1 Simon und Akin bearbeiten die <i>Bonbonaufgabe I</i> : Multiplizieren von Teil und Nenner (1:14 – 12:06) .....	225
7.3.2 Simon und Akin bearbeiten die <i>Bonbonaufgabe II</i> : Stammbruchganzen nehmen oder Verdoppeln (36:37 – 48:22)? .....	230
7.3.3 Laura und Melanie bearbeiten die <i>Bonbonaufgabe I</i> : Einheiten bilden (0:41 – 7:01).....	246
7.3.4 Laura und Melanie bearbeiten die <i>Bonbonaufgabe II</i> : Zusammenhänge operativ erschließen (30:33 – 37:35).....	251
7.4 Verdichtung: <i>Konstellation III</i> mit diskretem Teil.....	267
7.5 Analysen der schriftlichen Produkte zur Bestimmung des Ganzen (flächiger Teil).....	270
7.5.1 Auflistung der Codierung der Lösungen für die Items 3a und 3b ....	270
7.5.2 Ergebnisse und Interpretation zu den Items 3a und 3b.....	274
7.5.3 Auflistung der Codierung der Lösungen für die Items 4a und 4b ....	280
7.5.4 Ergebnisse und Interpretation zu den Items 4a und 4b.....	285
7.5.5 Vergleich zwischen den Items 3a, 3b, 4a und 4b.....	290
7.6 Analysen der Prozesse zur Bestimmung des Ganzen (flächiger Teil) .....	292
7.6.1 Ramona und Jule ergänzen zum Ganzen: Form des Ganzen und strukturelle Beziehungen (11:22 – 22:06) ....	292
7.6.2 Simon und Akin ergänzen zum Ganzen: Form des Ganzen in Welt und Mathematik (12:07 – 20:14) .....	299
7.6.3 Laura und Melanie ergänzen zum Ganzen: Anzahl der Quadrate (7:11 – 18:02).....	306
7.7 Diskussion der empirischen Befunde.....	313

<b>8. Zusammenhänge zwischen Konstellationen</b> .....	321
8.1 Konkretisierung der übergeordneten Forschungsfragen .....	322
8.2 Simon und Akin bearbeiten Merves Problem: Der wachsende Kuchen (29:37 – 36:35) .....	323
8.3 Analyse einiger Beispiele aus dem schriftlichen Test .....	330
8.4 Diskussion der empirischen Befunde .....	335
<b>9 Diskussion der Ergebnisse</b> .....	339
9.1 Zusammenschau der Kapitel 4 bis 8 .....	339
9.2 Konsequenzen für die Fachliche Klärung .....	348
9.3 Konsequenzen für die Didaktische Strukturierung .....	349
<b>10 Zusammenfassung und Ausblick</b> .....	351
10.1 Fazit .....	352
10.2 Forschungsmethodische Grenzen .....	353
10.3 Reflexion möglicher Anschlussfragen .....	354
<b>Schluss</b> .....	356
<b>Literatur</b> .....	357