

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Introduction du cours	2
1.2	Importance de la modélisation	3
1.3	Modélisation mathématique en écologie et évolution	4
1.3.1	Écologie et évolution	4
1.3.2	Dispersion et colonisation	5
1.3.3	Dynamique des populations	6
1.3.4	Génétique des populations	6
1.3.5	Quelques termes de vocabulaire	7
2	Populations spatiales et temps discret	9
2.1	Marches aléatoires et chaînes de Markov	9
2.2	Étude des temps de passage	15
2.2.1	Temps d'arrêt et propriété de Markov forte	15
2.2.2	Loi du premier temps de retour en 0 d'une marche aléatoire simple	17
2.3	Récurrence et transience - Théorèmes ergodiques	20
2.4	Marches aléatoires absorbées ou réfléchies	28
2.4.1	Barrières absorbantes	28
2.4.2	Barrières réfléchissantes	30
2.5	Martingales à temps discret	31
2.6	Exercices	35
3	Dynamique de population en temps discret	39
3.1	Chaînes de Markov de vie et de mort	40
3.2	Le processus de Bienaymé-Galton-Watson	43
3.2.1	Définition	43
3.2.2	Résultats élémentaires	45
3.2.3	Le comportement à l'infini	46

3.2.4	Cas sous-critique : Analyse fine de l'extinction	53
3.3	Relation entre processus de Bienaymé-Galton-Watson et modèle de généa- logie.	57
3.4	Comportement quasi-stationnaire	58
3.4.1	Distribution quasi-stationnaire et limite de Yaglom	58
3.4.2	Distributions quasi-stationnaires pour une chaîne de BGW	61
3.5	Extension 1 : Les chaînes densité-dépendantes	64
3.6	Extension 2 : Chaîne de BGW avec immigration	66
3.7	Extension 3 : le processus de BGW multitype	69
3.8	Exercices	76
4	Mouvement brownien et processus de diffusion	81
4.1	Convergence fini-dimensionnelle de marches aléatoires renormalisées	82
4.2	Processus aléatoire et mouvement brownien	85
4.3	Quelques propriétés du mouvement brownien	89
4.4	Propriété de Markov et mouvement brownien	93
4.5	Martingales à temps continu et temps d'arrêt	96
4.5.1	Martingales à temps continu	96
4.5.2	Inégalités fondamentales et comportement à l'infini	99
4.5.3	Le théorème d'arrêt	102
4.5.4	Applications au mouvement brownien	105
4.6	Intégrales stochastiques et EDS	110
4.6.1	Intégrales stochastiques	111
4.6.2	Equations différentielles stochastiques (EDS)	115
4.6.3	Système différentiel stochastique	120
4.6.4	Propriété de Markov d'une solution d'EDS	121
4.6.5	Formule d'Itô	122
4.6.6	Générateur - Lien avec les équations aux dérivées partielles	125
4.6.7	Applications aux temps d'atteinte de barrières	128
4.7	Equations différentielles stochastiques pour l'étude des populations	130
4.7.1	Equation de Feller	130
4.7.2	Equation de Feller logistique	133
4.7.3	Processus de Ornstein-Uhlenbeck	135
4.7.4	Autres exemples de déplacements spatiaux	136
4.7.5	Processus de Wright-Fisher	137
4.8	Exercices	138

5	Processus de population en temps continu	143
5.1	Processus markovien de saut	144
5.2	Un prototype : le processus de Poisson	147
5.2.1	Définition d'un processus de Poisson	147
5.2.2	Propriété de Markov forte	151
5.2.3	Comportement asymptotique d'un processus de Poisson	153
5.2.4	Processus de Poisson composé	155
5.3	Générateur d'un processus markovien de saut	156
5.3.1	Le générateur infinitésimal	156
5.3.2	Chaîne de Markov incluse	160
5.4	Processus de branchement en temps continu	162
5.4.1	Définition et propriété de branchement	162
5.4.2	Equation pour la fonction génératrice	165
5.4.3	Critère de non-explosion	166
5.4.4	Equation de moments - Probabilité et temps d'extinction	167
5.4.5	Le cas binaire	168
5.4.6	Extensions	170
5.5	Processus de naissance et mort	171
5.5.1	Définition et critère de non-explosion	171
5.5.2	Equations de Kolmogorov et mesure invariante	175
5.5.3	Critère d'extinction - Temps d'extinction	176
5.6	Approximations continues	181
5.6.1	Approximations déterministes - Equations malthusienne et logistique	181
5.6.2	Approximation stochastique - Stochasticité démographique, Equ- ation de Feller	185
5.6.3	Les modèles de proie-prédateur, système de Lotka-Volterra	188
5.7	Exercices	189
6	Processus d'évolution génétique	203
6.1	Un modèle idéalisé de population infinie : le modèle de Hardy-Weinberg	203
6.2	Population finie : le modèle de Wright-Fisher	204
6.2.1	Processus de Wright-Fisher	204
6.2.2	Distribution quasi-stationnaire pour un processus de Wright-Fisher	211
6.2.3	Processus de Wright-Fisher avec mutation	213
6.2.4	Processus de Wright-Fisher avec sélection	214
6.3	Modèles démographiques de diffusion	215

6.3.1	Diffusion de Wright-Fisher	215
6.3.2	Diffusion de Wright-Fisher avec mutation ou sélection	216
6.3.3	Autre changement d'échelle de temps	219
6.4	La coalescence : description des généalogies	219
6.4.1	Asymptotique quand N tend vers l'infini : le coalescent de Kingman	220
6.4.2	Le coalescent avec mutation	226
6.4.3	Loi du nombre d'allèles distincts, formule d'Ewens	229
6.4.4	Le point de vue processus de branchement avec immigration	233
6.5	Exercices	234
7	Quelques développements modernes en Ecologie-Evolution	237
7.1	Survie et croissance de métapopulations réparties sur un graphe	237
7.1.1	Première approche : processus de Galton-Watson multitype	237
7.1.2	Deuxième approche - Chaîne de Markov sur un graphe	238
7.2	Abondance en environnement aléatoire	241
7.3	Etude de l'invasion d'un mutant dans une grande population résidente à l'équilibre	243
7.4	Un modèle stochastique pour l'auto-incompatibilité des plantes à fleurs	245
7.5	Modélisation d'une population diploïde	249
7.5.1	Le processus de naissance et mort multitype	249
7.5.2	Approximations en grande population	252
7.6	Arbres généalogiques de populations sexuées	256
7.6.1	Modèle de Wright-Fisher diploïde avec recombinaison.	257
7.6.2	Nombre de générations pour arriver à l'ancêtre commun	261
	Bibliographie	265