
Table des matières

1	Pile, face, coupons	1
1.1	Jeu de pile ou face	1
1.2	Approximation binomiale-gaussienne	4
1.3	Distance en variation totale	5
1.4	Approximation binomiale-Poisson	8
1.5	Problème du collectionneur de coupons	9
1.6	Pour aller plus loin	15
2	Marches aléatoires	19
2.1	Marche aléatoire simple sur la droite	19
2.2	Marche aléatoire simple symétrique dans l'espace	26
2.3	Problème de Dirichlet et champ libre gaussien	30
2.4	Marche aléatoire sur le groupe symétrique	34
2.5	Pour aller plus loin	37
3	Branchement et processus de Galton-Watson	39
3.1	Extinction et phénomène de seuil	40
3.2	Étude des trois cas possibles	45
3.3	Taille de l'arbre en régimes critique et sous-critique	49
3.4	Immigration	52
3.5	Pour aller plus loin	54
4	Permutations, partitions, et graphes	57
4.1	Algorithme basique pour les lois discrètes	57
4.2	Permutations aléatoires	58
4.3	Partitions aléatoires	60
4.4	Graphes aléatoires	62
4.5	Arbres aléatoires	64
4.6	Pour aller plus loin	66

5	Mesures de Gibbs	69
5.1	Mesures de Gibbs	69
5.2	Algorithme de Metropolis-Hastings	72
5.3	Algorithme du recuit simulé	74
5.4	Algorithme de Propp-Wilson	77
5.5	Modélisation d'un composé chimique	78
5.6	Pour aller plus loin	80
6	Agrégation limitée par diffusion interne	83
6.1	Modèle d'agrégation par diffusion	83
6.2	Modèle unidimensionnel	84
6.3	Convergence presque sûre	85
6.4	Convergence en loi	86
6.5	Une inégalité de concentration	89
6.6	Dimensions supérieures	89
6.7	Pour aller plus loin	91
7	Chaînes de Markov cachées	93
7.1	Algorithme progressif-rétrograde	93
7.2	Filtre de Kalman	99
7.3	Pour aller plus loin	102
8	Algorithme EM et mélanges	105
8.1	Modèle pour les nids de mouettes	105
8.2	Situation favorable mais irréaliste	107
8.3	Résolution du vrai problème	108
8.4	Pour aller plus loin	111
9	Urnes d'Ehrenfest	113
9.1	Modèle microscopique	113
9.2	Urne d'Ehrenfest	121
9.3	Pression au fil du temps	122
9.4	Fluctuations autour de la moyenne à l'équilibre	124
9.5	Quand reverra-t-on le vide?	125
9.6	Pour aller plus loin	127
10	Records, extrêmes, et recrutements	129
10.1	Élitisme	129
10.2	Au-dessus de la moyenne	132
10.3	Cas de la loi exponentielle	133
10.4	Cas de la loi de Pareto	136
10.5	Pour aller plus loin	137

11	File d'attente M/M/Infini	139
11.1	Lois exponentielles	141
11.2	Temps de demi-vie des clients initiaux	144
11.3	Loi du nombre de clients	145
11.4	Comportement en temps long	149
11.5	Pour aller plus loin	153
12	Modèle de Wright-Fisher	155
12.1	Loi de Hardy-Weinberg	155
12.2	Modèle de Moran	156
12.3	Modèle de Wright-Fisher et fixation	159
12.4	Modèle de Wright-Fisher avec mutations	164
12.5	Modèle de Wright-Fisher avec sélection	166
12.6	Modèle de Cannings	167
12.7	Pour aller plus loin	170
13	Généalogies et coalescence	171
13.1	Modèle généalogique à temps continu	174
13.2	Longueur de l'arbre généalogique	176
13.3	Mutations	178
13.4	Coalescent de Kingman	181
13.5	Pour aller plus loin	183
14	Restaurants chinois	185
14.1	Lois d'Ewens	187
14.2	Nombre de tables	189
14.3	Tables extrêmes	193
14.4	Compléments de combinatoire	195
14.5	Pour aller plus loin	196
15	Renforcement	199
15.1	Urne de Pólya	199
15.2	Graphe de Barabási-Albert	203
15.3	Marche aléatoire renforcée	206
15.4	Théorème de Rubin	210
15.5	Pour aller plus loin	212
16	Percolation	215
16.1	Percolation dans un graphe	215
16.2	Graphe de Bethe (arbre régulier)	218
16.3	Graphe euclidien (grille)	220
16.4	Graphe complet et modèle de Erdős-Rényi	224
16.5	Pour aller plus loin	226

17 Croissance et fragmentation	229
17.1 Processus TCP window-size en informatique	229
17.2 Intensité des sauts variable selon la position	236
17.3 Branchement et croissance-fragmentation	237
17.4 Pour aller plus loin	241
18 Ruine d'une compagnie d'assurance	243
18.1 Processus de Poisson composé	245
18.2 La ruine est-elle presque sûre ?	246
18.3 Expression de la probabilité de ruine	247
18.4 Sinistres exponentiels	248
18.5 Pour aller plus loin	250
19 Polymères dirigés en environnement aléatoire	251
19.1 Modèle et résultats principaux	251
19.2 Fonction de partition normalisée	255
19.3 Borne inférieure en grandes dimensions	257
19.4 Énergie libre moyenne	259
19.5 Borne supérieure sur le paramètre critique	261
19.6 Pour aller plus loin	263
20 Problème du voyageur de commerce	265
20.1 Concentration pour le cas uniforme	267
20.2 Évaluation de la moyenne du cas uniforme	271
20.3 Démonstration du cas uniforme	275
20.4 Pour aller plus loin	275
21 Matrices aléatoires	277
21.1 Théorème de Wigner	278
21.2 Réduction à un cas plus simple	281
21.3 Convergence des moments et convergence étroite	285
21.4 Preuve du théorème de Wigner simplifié	288
21.5 Pour aller plus loin	292
22 Naissances et assassinats	295
22.1 Condition suffisante de stabilité	297
22.2 Condition suffisante d'instabilité	298
22.3 Pour aller plus loin	301
23 Modèle du télégraphe	303
23.1 Aspects markoviens du processus complet	304
23.2 Lien entre équation et processus	307
23.3 Modification ergodique	308
23.4 Pour aller plus loin	311

24	Problème de Dirichlet	313
	24.1 Interprétation probabiliste	315
	24.2 Cas de la boule unité	317
	24.3 Approches numériques	318
	24.4 Demi-plan supérieur : du discret au continu	319
	24.5 Récurrence, transience, et fonctions harmoniques	321
	24.6 Pour aller plus loin	322
25	Processus d'Ornstein-Uhlenbeck	325
	25.1 Premières propriétés	326
	25.2 Décomposition spectrale et inégalité de Poincaré	331
	25.3 Entropie, couplage, et temps long	335
	25.4 Inégalité de Sobolev logarithmique	338
	25.5 Pour aller plus loin	341
26	Modèles de diffusion cinétique	343
	26.1 Modèle de Langevin	343
	26.2 Processus de Langevin confiné	345
	26.3 Comportement en temps long du processus confiné	348
	26.4 Pour aller plus loin	354
27	Des chaînes de Markov aux processus de diffusion	357
	27.1 Paresse et échantillonnage	357
	27.2 Convergence d'une chaîne vers une diffusion	359
	27.3 Diffusion sur un intervalle	362
	27.4 Application aux processus de Wright-Fisher	364
	27.5 Fonction de répartition empirique	368
	27.6 Schéma d'Euler	369
	27.7 Pour aller plus loin	371
	Suggestions bibliographiques	373
	Littérature	375
	Index	391
	Principales notations et abréviations	397