

# Inhaltsverzeichnis

<b>I Aufgaben</b>	<b>1</b>
<b>0 Lineare Gleichungssysteme</b>	<b>3</b>
0.3 Ebenen und Geraden im Standardraum $\mathbb{R}^3$ . . . . .	3
0.4 Das Eliminationsverfahren von GAUSS . . . . .	4
Ergänzungsaufgaben . . . . .	5
0.5 Geraden und Quadratische Kurven im $\mathbb{R}^2$ . . . . .	7
<b>1 Grundbegriffe</b>	<b>11</b>
1.1 Mengen und Abbildungen . . . . .	11
Ergänzungsaufgabe . . . . .	12
1.2 Gruppen . . . . .	12
Ergänzungsaufgaben . . . . .	13
1.3 Ringe, Körper und Polynome . . . . .	18
Ergänzungsaufgaben . . . . .	20
1.4 Vektorräume . . . . .	21
Ergänzungsaufgabe . . . . .	22
1.5 Basis und Dimension . . . . .	23
1.6 Summen von Vektorräumen* . . . . .	24
Ergänzungsaufgabe . . . . .	25
<b>2 Lineare Abbildungen</b>	<b>26</b>
2.1 Beispiele und Definitionen . . . . .	26
2.2 Bild, Fasern und Kern, Quotientenvektorräume* . . . . .	27
Ergänzungsaufgabe . . . . .	28
2.3 Lineare Gleichungssysteme . . . . .	28
2.4 Lineare Abbildungen und Matrizen . . . . .	30
Ergänzungsaufgabe . . . . .	31
2.5 Multiplikation von Matrizen . . . . .	31
Ergänzungsaufgaben . . . . .	34
2.6 Koordinatentransformationen . . . . .	34
2.7 Elementarmatrizen und Matrizenumformungen . . . . .	35
Ergänzungsaufgaben . . . . .	36
<b>3 Determinanten</b>	<b>39</b>
3.1 Beispiele und Definitionen . . . . .	39
Ergänzungsaufgaben . . . . .	40
3.2 Existenz und Eindeutigkeit . . . . .	41
Ergänzungsaufgaben . . . . .	43

---

3.3	Minoren* . . . . .	44
	Ergänzungsaufgaben . . . . .	45
3.4	Determinante eines Endomorphismus und Orientierung* . . . .	46
	Ergänzungsaufgabe . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Eigenwerte</b> . . . . .	<b>47</b>
4.1	Beispiele und Definitionen . . . . .	47
	Ergänzungsaufgabe . . . . .	48
4.2	Das charakteristische Polynom . . . . .	48
	Ergänzungsaufgaben . . . . .	49
4.3	Diagonalisierung . . . . .	49
	Ergänzungsaufgabe . . . . .	50
4.4	Trigonalisierung* . . . . .	51
4.5	Potenzen eines Endomorphismus* . . . . .	51
4.6	Die Jordansche Normalform* . . . . .	52
	Ergänzungsaufgabe . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Euklidische und unitäre Vektorräume</b> . . . . .	<b>56</b>
5.1	Das kanonische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	56
5.2	Das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	59
5.3	Das kanonische Skalarprodukt im $\mathbb{C}^n$ . . . . .	61
5.4	Bilinearformen und Sesquilinearformen . . . . .	61
	Ergänzungsaufgaben . . . . .	63
5.5	Orthogonale und unitäre Endomorphismen . . . . .	67
	Ergänzungsaufgabe . . . . .	68
5.6	Selbstadjungierte Endomorphismen* . . . . .	68
	Ergänzungsaufgaben . . . . .	69
5.7	Hauptachsentransformation* . . . . .	69
	Ergänzungsaufgaben . . . . .	71
<b>6</b>	<b>Dualität*</b> . . . . .	<b>72</b>
6.1	Dualräume . . . . .	72
6.2	Dualität und Skalarprodukte . . . . .	72
	Ergänzungsaufgaben . . . . .	73
6.3	Tensorprodukte* . . . . .	73
6.4	Multilineare Algebra* . . . . .	76
	Ergänzungsaufgaben . . . . .	79

<b>II</b>	<b>Lösungen</b>	<b>83</b>
<b>0</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme</b>	<b>85</b>
0.3	Ebenen und Geraden im Standardraum $\mathbb{R}^3$ . . . . .	85
0.4	Das Eliminationsverfahren von GAUSS . . . . .	88
	Ergänzungsaufgaben . . . . .	91
0.5	Geraden und Quadratische Kurven im $\mathbb{R}^2$ . . . . .	92
<b>1</b>	<b>Grundbegriffe</b>	<b>98</b>
1.1	Mengen und Abbildungen . . . . .	98
	Ergänzungsaufgabe . . . . .	103
1.2	Gruppen . . . . .	104
	Ergänzungsaufgaben . . . . .	109
1.3	Ringe, Körper und Polynome . . . . .	116
	Ergänzungsaufgaben . . . . .	123
1.4	Vektorräume . . . . .	127
	Ergänzungsaufgabe . . . . .	133
1.5	Basis und Dimension . . . . .	134
1.6	Summen von Vektorräumen* . . . . .	141
	Ergänzungsaufgabe . . . . .	144
<b>2</b>	<b>Lineare Abbildungen</b>	<b>146</b>
2.1	Beispiele und Definitionen . . . . .	146
2.2	Bild, Fasern und Kern, Quotientenvektorräume* . . . . .	149
	Ergänzungsaufgabe . . . . .	153
2.3	Lineare Gleichungssysteme . . . . .	153
2.4	Lineare Abbildungen und Matrizen . . . . .	157
	Ergänzungsaufgabe . . . . .	161
2.5	Multiplikation von Matrizen . . . . .	162
	Ergänzungsaufgaben . . . . .	171
2.6	Koordinatentransformationen . . . . .	173
2.7	Elementarmatrizen und Matrizenumformungen . . . . .	176
	Ergänzungsaufgaben . . . . .	179
<b>3</b>	<b>Determinanten</b>	<b>184</b>
3.1	Beispiele und Definitionen . . . . .	184
	Ergänzungsaufgaben . . . . .	188
3.2	Existenz und Eindeutigkeit . . . . .	191
	Ergänzungsaufgaben . . . . .	204
3.3	Minoren* . . . . .	209
	Ergänzungsaufgaben . . . . .	215

3.4	Determinante eines Endomorphismus und Orientierung*	216
	Ergänzungsaufgabe	219
<b>4</b>	<b>Eigenwerte</b>	<b>220</b>
4.1	Beispiele und Definitionen	220
	Ergänzungsaufgabe	222
4.2	Das charakteristische Polynom	223
	Ergänzungsaufgaben	226
4.3	Diagonalisierung	227
	Ergänzungsaufgabe	233
4.4	Trigonalisierung*	235
4.5	Potenzen eines Endomorphismus*	239
4.6	Die Jordansche Normalform*	242
	Ergänzungsaufgabe	253
<b>5</b>	<b>Euklidische und unitäre Vektorräume</b>	<b>254</b>
5.1	Das kanonische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$	254
5.2	Das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$	260
5.3	Das kanonische Skalarprodukt im $\mathbb{C}^n$	264
5.4	Bilinearformen und Sesquilinearformen	266
	Ergänzungsaufgaben	278
5.5	Orthogonale und unitäre Endomorphismen	288
	Ergänzungsaufgabe	293
5.6	Selbstadjungierte Endomorphismen*	293
	Ergänzungsaufgaben	295
5.7	Hauptachsentransformation*	297
	Ergänzungsaufgaben	302
<b>6</b>	<b>Dualität*</b>	<b>304</b>
6.1	Dualräume	304
6.2	Dualität und Skalarprodukte	306
	Ergänzungsaufgaben	309
6.3	Tensorprodukte*	309
6.4	Multilineare Algebra	321
	Ergänzungsaufgaben	329
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>332</b>
	<b>Sachwortverzeichnis</b>	<b>334</b>
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>340</b>
	<b>Verzeichnis der Ergänzungsaufgaben</b>	<b>342</b>