

Inhalt

I	Formales Fundament	1
1	Ein wenig Logik	3
1.1	Aussagenlogik	3
1.1.1	Aussagen	3
1.1.2	Junktoren	5
1.1.3	„nicht“	6
1.1.4	„und“	7
1.1.5	„(entweder) oder“	7
1.1.6	„wenn ..., dann ...“	7
1.1.7	„... genau dann, wenn ...“	8
1.1.8	Aussagenlogische Formeln	9
1.1.9	Aussagenlogische Äquivalenz	10
1.2	Ausblick auf die Prädikatenlogik	14
1.2.1	Prädikate und Individuen	14
1.2.2	Der Allquantor	15
1.2.3	Der Existenzquantor	16
2	Beweismethoden	19
2.1	Exkurs: Grundwissen über Zahlen	19
2.2	Direkter Beweis	21
2.3	Indirekter Beweis	25
2.3.1	Kontraposition	25
2.3.2	Widerspruchsbeweis	27
2.4	Beweis durch vollständige Induktion	30
3	Mengen und Abbildungen	37
3.1	Mengen	37
3.1.1	Der Mengenbegriff	37
3.1.2	Teilmengen und Mengenoperationen	39
3.2	Abbildungen	44
3.2.1	Der Abbildungsbegriff	45
3.2.2	Bild- und Urbildmenge	46
3.2.3	In-, Sur- und Bijektivität	48
3.2.4	Verkettung und Umkehrabbildung	50
3.2.5	Mächtigkeitsvergleiche unendlicher Mengen	54

II	Anfänge der Analysis	59
4	Grenzwerte von Folgen und Reihen	61
4.1	Folgen	61
4.1.1	Der Grenzwertbegriff	61
4.1.2	Die Grenzwertsätze	69
4.1.3	Exkurs: Die Vollständigkeit von \mathbb{R}	72
4.1.4	Ausblick: Cauchyfolgen	74
4.1.5	Monotone Folgen	75
4.1.6	Rekursive Folgen	77
4.2	Reihen	83
4.2.1	Reihen als spezielle Folgen	83
4.2.2	Die geometrische Reihe	86
4.2.3	Die eulersche Zahl	91
4.2.4	Konvergenzkriterien für Reihen	94
4.2.5	Ausblick: Potenzreihen	98
4.2.6	Ausblick: e -Funktion und natürlicher Logarithmus	101
5	Grundwissen Differenzialrechnung	105
5.1	Die Ableitung	105
5.1.1	Die Steigung einer Kurve	105
5.1.2	Der Grenzwert der Sekantensteigungen	107
5.1.3	Die Tangentengleichung	111
5.1.4	Lineare Approximation	113
5.1.5	Differenzierbarkeit	114
5.2	Ableitungsregeln	120
5.2.1	Faktor- und Summenregel	120
5.2.2	Die Potenzregel	121
5.2.3	Die Ableitung von Sinus und Cosinus	122
5.2.4	Die Produktregel	125
5.2.5	Die Kettenregel	127
5.2.6	Ableitung der Umkehrfunktion	131
5.2.7	Die Quotientenregel	134
5.2.8	Vermischte Übungen	135
5.3	Ausblick: Ableiten von Potenzreihen	136
5.4	Ausblick: Taylorreihen	137
6	Grundwissen Integralrechnung	143
6.1	Stammfunktionen	143
6.2	Das bestimmte Integral	147
6.2.1	Die Streifenmethode	147
6.2.2	Das Darboux-Integral	152
6.2.3	Das Riemann-Integral	156
6.2.4	Integral und Fläche	161
6.3	Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung	163
6.4	Uneigentliche Integrale	168

III	Rechenfertigkeiten	171
7	Lösen von (Un)Gleichungen	173
7.1	Polynom(un)gleichungen	173
7.1.1	Lineare und quadratische Gleichungen	173
7.1.2	Gleichungen höheren Grades	174
7.1.3	Polynomgleichungen	177
7.2	Bruch(un)gleichungen	181
7.2.1	Bruchgleichungen	181
7.2.2	Bruchungleichungen	182
7.3	Wurzel(un)gleichungen	186
7.3.1	Wurzelgleichungen	186
7.3.2	Wurzelungleichungen	187
7.4	Betrags(un)gleichungen	188
7.4.1	Betragsgleichungen und Betragsfunktionen	188
7.4.2	Betragsungleichungen	192
7.5	Exponential(un)gleichungen	193
7.5.1	Exponentialgleichungen	193
7.5.2	Exponentialungleichungen	196
8	Die Kunst des Integrierens	198
8.1	Produktintegration	198
8.2	Integration durch Substitution	203
8.2.1	Die Substitutionsregel	203
8.2.2	Trigonometrische Substitution	206
8.2.3	Hyperbolische Substitution	214
8.3	Integration durch Partialbruchzerlegung	217
8.4	Vermischte Übungen	221
IV	Abstrakte Algebra	223
9	Komplexe Zahlen	225
9.1	Überblick über die bekannten Zahlbereiche	225
9.2	Einführung der komplexen Zahlen \mathbb{C}	226
9.2.1	Konstruktion von \mathbb{C}	226
9.2.2	Rechnen mit komplexen Zahlen	230
9.2.3	Komplexe Konjugation und Betrag	233
9.3	Der Körper der komplexen Zahlen	236
9.3.1	Was ist ein Körper?	236
9.3.2	Unmöglichkeit der Anordnung von \mathbb{C}	241
9.3.3	Ausblick: Der Quaternionenschiefkörper	242
9.4	Polarform komplexer Zahlen	245
9.4.1	Polarkoordinaten	245
9.4.2	Eulers Identität	246
9.4.3	Multiplikation in Polarform	248

9.4.4	Komplexe Quadratwurzeln	249
9.4.5	Exkurs: Beweis trigonometrischer Identitäten	254
9.5	Algebraische Gleichungen in \mathbb{C}	255
9.5.1	Quadratische Gleichungen	255
9.5.2	Die Kreisteilungsgleichung	257
9.5.3	Ausblick: Der Fundamentalsatz der Algebra	260
10	Grundzüge der Linearen Algebra	263
10.1	Vektorräume	263
10.1.1	Zwei nur auf den ersten Blick verschiedene Beispiele	263
10.1.2	Die Vektorraumaxiome	265
10.1.3	Beispiele für Vektorräume	267
10.1.4	Untervektorräume	272
10.1.5	Basis und Dimension	275
10.2	Lineare Abbildungen	282
10.2.1	Definition und Beispiele linearer Abbildungen	283
10.2.2	Kern und Bild einer linearen Abbildung	287
10.2.3	Isomorphie	293
10.3	Matrizen	297
10.3.1	Die Matrix einer linearen Abbildung	297
10.3.2	Das Matrixprodukt	306
10.4	Ausblick: LGS und Determinanten	311
10.4.1	Homogene LGS	311
10.4.2	Die Determinante	315
10.4.3	Inhomogene LGS	317
V	Anhang	321
11	Lösungen zu den Übungsaufgaben	323
11.1	Lösungen zu Kapitel 1	323
11.2	Lösungen zu Kapitel 2	328
11.3	Lösungen zu Kapitel 3	340
11.4	Lösungen zu Kapitel 4	349
11.5	Lösungen zu Kapitel 5	364
11.6	Lösungen zu Kapitel 6	369
11.7	Lösungen zu Kapitel 7	373
11.8	Lösungen zu Kapitel 8	388
11.9	Lösungen zu Kapitel 9	408
11.10	Lösungen zu Kapitel 10	423