

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|----------|
| 1 Die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen | 1 |
| 1.1 Vorbemerkungen | 3 |
| Die Strategie: Wie wird das Axiomensystem für \mathbb{R} hergeleitet? | |
| 1.2 Mengen | 6 |
| Mengen, Mengenoperationen, Abbildungen. | |
| 1.3 Algebraische Strukturen | 16 |
| Innere Kompositionen und ihre Eigenschaften, Körper, logischer Exkurs, Körper-eigenschaften. | |
| 1.4 Angeordnete Körper | 33 |
| Positivbereich, angeordnete Körper, Gegenbeispiele. | |
| 1.5 Natürliche Zahlen, vollständige Induktion | 37 |
| Definition von \mathbb{N} , Induktion, Musterbeweise, Eigenschaften von \mathbb{N} . | |
| 1.6 Die ganzen und die rationalen Zahlen | 48 |
| \mathbb{Z} und \mathbb{Q} , Dichtheitssatz. | |
| 1.7 Das Archimedesaxiom | 52 |
| Archimedesaxiom und Folgerungen. | |
| 1.8 Vollständigkeit | 56 |
| Dedekindsche Schnitte, Schnittzahlen, Vollständigkeit, das Axiomensystem für \mathbb{R} . | |
| 1.9 Von \mathbb{R} zu \mathbb{C} | 58 |
| Der Körper \mathbb{C} , Eigenschaften. | |
| 1.10 Wie groß ist \mathbb{R} ? | 63 |
| Ergänzungen zur Mengenlehre, Mengen mit gleicher Kardinalzahl, abzählbar und überabzählbar, die Cantorsche Diagonalverfahren. | |
| 1.11 Ergänzungen | 69 |
| Peano-Axiome, der „konstruktive“ Aufbau der reellen Zahlen, Gleichheit in der Mathematik, Eindeutigkeit von \mathbb{R} , Sicherheit der Grundlagen. | |
| 1.12 Verständnisfragen | 77 |
| 1.13 Übungsaufgaben | 81 |
| 1.14 Tipps zu den Übungsaufgaben | 85 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 2 | Folgen und Reihen | 89 |
| 2.1 | Folgen | 91 |
| | Folgen, Teilfolgen, Umordnungen. | |
| 2.2 | Konvergenz | 95 |
| | Betrag in \mathbb{R} , Existenz der Wurzel, Betrag in \mathbb{C} , Nullfolge, Konvergenz, Konvergenzbeweise. | |
| 2.3 | Cauchy-Folgen und Vollständigkeit | 122 |
| | Cauchy-Folgen, Zusammenhang zur Konvergenz, Ordnungsrelationen, Supremum und Infimum, äquivalente Versionen der Vollständigkeit. | |
| 2.4 | Unendliche Reihen | 135 |
| | Reihen, Konvergenzkriterien, absolut konvergente Reihen. | |
| 2.5 | Ergänzungen | 150 |
| | Dezimalentwicklung, \mathbb{R} als Menge der Dezimalzahlen, ungeordnete Summation, Folgenräume. | |
| 2.6 | Verständnisfragen | 166 |
| 2.7 | Übungsaufgaben | 169 |
| 2.8 | Tipps zu den Übungsaufgaben | 173 |
| 3 | Metrische Räume und Stetigkeit | 175 |
| 3.1 | Metrische Räume | 175 |
| | Metriken und Normen, Konvergenz, Kugeln, offene und abgeschlossene Teilmengen, Abschluss und Inneres, dichte Teilmengen. | |
| 3.2 | Kompaktheit | 195 |
| | Kompaktheit, Kompaktheitskriterien, Charakterisierung der kompakten Teilmengen endlich-dimensionaler Räume, Zweipunktkompaktifizierung von \mathbb{R} . | |
| 3.3 | Stetigkeit | 207 |
| | Stetige Funktionen, Lipschitzabbildungen, Permanenzeigenschaften, Charakterisierung, Zwischenwertsatz, Satz vom Maximum, gleichmäßige Stetigkeit. | |
| 3.4 | Verständnisfragen | 230 |
| 3.5 | Übungsaufgaben | 234 |
| 3.6 | Tipps zu den Übungsaufgaben | 236 |
| 4 | Differentiation (eine Veränderliche) | 239 |
| 4.1 | Differenzierbare Funktionen | 240 |
| | Stetige Ergänzung, differenzierbare Funktionen, Ableitungsregeln. | |
| 4.2 | Mittelwertsätze | 255 |
| | Satz von Rolle, Mittelwertsätze, Regeln von l'Hôpital. | |
| 4.3 | Taylorpolynome | 270 |
| | Taylor-Polynome, Restglied, Restgliedformel, Extremwertaufgaben. | |
| 4.4 | Potenzreihen | 282 |
| | Potenzreihen, Konvergenzradius, Limes superior und Limes inferior, Formel für den Konvergenzradius, Differenzierbarkeit von Potenzreihen, entwickelbare Funktionen, das Gegenbeispiel von Cauchy. | |
| 4.5 | Spezielle Funktionen | 303 |
| | Zwei Differentialgleichungen zur Motivation, Exponentialfunktion, Logarithmus, allgemeine Potenz, Sinus und Cosinus, spezielle Funktionen im Komplexen, Polardarstellung. | |

| | | |
|----------------|---|------------|
| 4.6 | Fundamentalsatz, Differentialgleichungen | 330 |
| | Fundamentalsatz, Lösung spezieller Typen von Differentialgleichungen. | |
| 4.7 | Verständnisfragen | 343 |
| 4.8 | Übungsaufgaben | 348 |
| 4.9 | Tipps zu den Übungsaufgaben | 350 |
| Anhänge | | 353 |
| | Computeralgebra | 354 |
| | Mathematik und neue Medien | 356 |
| | Die Internetseite zum Buch | 357 |
| | Griechische Symbole | 358 |
| | Lösungen zu den „?“ | 359 |
| | Register | 367 |