

Inhaltsverzeichnis

Geleitwort	V
Danksagungen	VII
Einleitung	1
I. Theoretische Grundlagen & empirische Erkenntnisse	11
1. Instrumentelle Genese, Zeichen und der didaktische Ditetraeder	13
1.1. Der didaktische Tetraeder und die verwandten Theorien	14
1.1.1. Das Didaktische Dreieck	15
1.1.2. Artefakte und Instrumente	18
1.1.3. Der didaktische Tetraeder	37
1.2. Zeichen, Konzepte und das epistemologische Dreieck	42
1.2.1. Zeichen im Mathematikunterricht	43
1.2.2. Theorien über individuelle mathematische Konzepte und Begriffe	62
1.2.3. Das epistemologische Dreieck	88
1.3. Der didaktische Ditetraeder der Innen- und Außenwelt des Lernens	98
1.3.1. Das interne Spiegeldreieck der instrumentellen Genese	99
1.3.2. Der Tetraeder der Innenwelt des Lernens	106
1.3.3. Der Ditetraeder im Kontext	112
2. Einsatz digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht	117
2.1. Werkzeuge, Medien & Technologie im Mathematikunterricht	118
2.1.1. Verwendung technischer Hilfsmittel im Mathematikunter- richt	119
2.1.2. Werkzeuge im Mathematikunterricht	121
2.2. Digitale Werkzeuge für den Mathematikunterricht	125
2.2.1. Tabellenkalkulation	126
2.2.2. Funktionenplotter / grafikfähiger Taschenrechner	128
2.2.3. Computeralgebrasystem	130
2.2.4. Dynamische Geometriesoftware	135
2.2.5. Multirepräsentationssysteme und Handhelds	138
2.3. Ausgewählte didaktische Überlegungen	142
2.3.1. Black Box – White Box	143
2.3.2. Kognitive (digitale) Werkzeuge und diagrammatisches Den- ken	146
2.3.3. Instrumentelle Genese & instrumentelle Orchestrierung	149

3.	Theorie des funktionalen Denkens	155
3.1.	Der Begriff des funktionalen Denkens	156
3.1.1.	Perspektiven funktionalen Denkens	157
3.2.	Darstellungen und Übersetzungen zwischen Darstellungen	169
3.2.1.	Darstellungen	171
3.2.2.	Darstellungsformen von Funktionen	185
3.2.3.	Darstellungsvielfalt und Darstellungswechsel	189
3.2.4.	Darstellungswechsel und Übersetzungstätigkeiten im Um- gang mit Funktionen	200
3.3.	Integrierte Sichtweisen	205
3.3.1.	Der „Function Block“	205
3.3.2.	Facetten und Ebenen des Funktionskonzeptes	207
3.3.3.	Das Haus des funktionalen Denkens	209
4.	Problemlösen und Realitätsbezüge im Mathematikunterricht	211
4.1.	Problemlösen	212
4.1.1.	Begriffe der Problemlöseforschung	213
4.1.2.	Klassifikation von Problemlöseprozessen	226
4.2.	Realitätsbezüge im Mathematikunterricht	239
4.2.1.	Anwendungen von Mathematik in der Schule	240
4.2.2.	Realitätsbezüge, Modelle und Modellierung	243
4.2.3.	Arten und Eigenschaften von Aufgaben mit Realitätsbezug	250
4.3.	Modellieren, Problemlösen und digitale Werkzeuge	260
4.3.1.	Die Abgrenzung und Integration von Modellieren und Pro- blemlösen	261
4.3.2.	Theorien zum Einsatz digitaler Werkzeuge beim Modellie- ren und Problemlösen	264
5.	Ausgewählte empirische Ergebnisse im Rahmen der vorgestellten Theo- rie und verbindende Studien	271
5.1.	Einsatz digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht	272
5.1.1.	Ergebnisse von Metastudien zum Einsatz digitaler Werk- zeuge	272
5.1.2.	Studien zum langfristigen Werkzeugeinsatz	278
5.1.3.	Ergänzende Ergebnisse zum Einsatz digitaler Werkzeuge	284
5.2.	Anbindung der Forschung zu digitalen Werkzeugen	291
5.2.1.	Funktionales Denken	292
5.2.2.	Realitätsbezüge, Modellieren und Problemlösen	298
II.	Forschungsdesign	305
6.	Forschungsfragen und Ziele	307
6.1.	Forschungsinteresse	308
6.1.1.	Theoretische Verankerung des Forschungsinteresses	309
6.1.2.	Empirische Verankerung des Forschungsinteresses	311

6.2.	Ausdifferenzierung der Forschungsfrage	313
6.2.1.	Konkretisierung bezüglich des mathematischen Wissens	313
6.2.2.	Konkretisierung bezüglich des digitalen Werkzeugs	317
6.2.3.	Konkretisierung bezüglich der Rahmenbedingungen des Lernens	319
6.3.	Endgültige Forschungsfrage	321
7.	Forschungsmethodik	323
7.1.	Allgemeine methodische Verortung	324
7.1.1.	Verortung in der qualitativen Forschung	324
7.1.2.	Das qualitative Experiment	326
7.2.	Datenerhebung	329
7.2.1.	Videographierung von Aufgabenbearbeitung	330
7.2.2.	Interview	335
7.3.	Datenanalyse	344
7.3.1.	Qualitative Inhaltsanalyse	345
7.3.2.	Konkretes Analysedesign	349
7.3.3.	Darstellung konkreter Analyseentscheidungen am Beispiel	357
7.3.4.	Interraterreliabilität	366
8.	Das Projekt CASI und Einbettung des Forschungsvorhabens	373
8.1.	Konzeption des Projekts CASI	374
8.2.	Publizierte Ergebnisse	377
8.3.	Einbettung des Forschungsvorhabens	381
8.3.1.	Die organisatorische Einbindung des Forschungsvorhabens in das Projekt CASI	381
8.3.2.	Die Daten der untersuchten Schülerinnen und Schüler im Kontext des Projekts CASI	382
9.	Diskussion der Testaufgaben	389
9.1.	Rationale Aufgabenanalyse	390
9.2.	Kriterien für Aufgabenschwierigkeit	393
9.2.1.	Vergleich verschiedener Theorien zu Aufgabenschwierigkeit	394
9.2.2.	Schwierigkeitsgenerierende Merkmale	399
9.3.	Analyseschema für Aufgaben mit Realitätsbezug	402
9.3.1.	Modellierungsaktivitäten	403
9.3.2.	Datenlage	405
9.3.3.	Art des Realitätsbezuges	406
9.3.4.	Situation oder Kontext	407
9.3.5.	Art des Modells	408
9.3.6.	Art der Repräsentation	409
9.3.7.	Offenheit der Aufgabe	410
9.3.8.	Kognitive Anforderungen und mathematischer Inhalt	410
9.4.	Analyse der Aufgaben	411
9.4.1.	Aufgabe 1	411

9.4.2. Aufgabe 2	413
9.4.3. Aufgabe 3	416
9.4.4. Aufgabe 4	420
III. Ergebnisse	425
10. Fallbeschreibungen	427
10.1. Lösungen der Aufgaben 1 und 3	427
10.1.1. Lösungen von Aufgabe 1	427
10.1.2. Lösungen von Aufgabe 3	433
10.2. Lösungsprozesse von Aufgabe 2	438
10.2.1. Die Projektgruppen	438
10.2.2. Die Kontrollgruppen	443
10.3. Lösungsprozesse von Aufgabe 4	447
10.3.1. Die Projektgruppen	448
10.3.2. Die Kontrollgruppen	454
11. Darstellung der Ergebnisse	461
11.1. Darstellung der Ergebnisse im Bezug auf die Produktdaten	461
11.1.1. Aufgabe 1	462
11.1.2. Aufgabe 2	463
11.1.3. Aufgabe 3	464
11.1.4. Aufgabe 4	465
11.2. Darstellung der Ergebnisse im Bezug auf die Prozessdaten	468
11.2.1. Aufgabe 2	469
11.2.2. Aufgabe 4	475
IV. Diskussion und Ausblick	481
12. Diskussion	483
12.1. Diskussion der Ergebnisse	483
12.1.1. Diskussion des Einflusses auf Darstellungsformen von Funktionen	484
12.1.2. Diskussion des Einflusses auf Aspekte funktionalen Denkens	489
12.1.3. Diskussion des Einflusses auf das Verhalten beim Lösen mathematischer Aufgaben	496
12.1.4. Zusammenfassende Bemerkungen	506
12.2. Diskussion der Methode	508
12.2.1. Diskussion der Kernkriterien	509
12.2.2. Diskussion der allgemeinen Gütekriterien qualitativer Forschung	512
12.2.3. Diskussion der Gütekriterien qualitativer Inhaltsanalyse	514
13. Ausblick	517
13.1. Ausblick auf der Basis der theoretischen Grundlagen	517
13.2. Ausblick auf der Basis der empirischen Studie	522
Literaturverzeichnis	525
Inhaltsverzeichnis des Digitalanhangs	561