

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung: Problemstellung, Forschungsanliegen und Zielsetzung.....	1
1.1	Die Übergangsproblematik in der Mathematik und die doppelte Diskontinuität.....	2
1.2	Konzeptionen von Lehrveranstaltungen zur Einführung in die höhere Mathematik und der Fokus des Beweisens	6
1.2.1	Transition-to-proof-Kurse.....	7
1.2.2	Problemzentrierte Kurskonzepte	9
1.2.3	Das Leitbild ‚Elementarmathematik als Prozess‘ in der Lehrramtsausbildung	13
1.3	Zwischenfazit.....	20
1.4	Forschungsanliegen, Zielsetzung und Aufbau der Arbeit	21
1.4.1	Forschungsanliegen, Zielsetzungen und Forschungsfrage	21
1.4.2	Aufbau der Arbeit	22
2	Theoretische Grundlagen.....	25
2.1	Der mathematische Beweis	26
2.1.1	Der Beweisbegriff	26
2.1.2	Formale Beweise	29
2.1.3	Operative und generische Beweise	33
2.1.4	Strenge beim Beweisen	38
2.1.5	Die Argumentationsgrundlage beim Beweisen und das lokale Ordnen	41
2.1.6	Beweisbedürfnis	42
2.1.7	Funktionen von Beweisen	45
2.2	Ausgewählte Aspekte zum Erlernen der Beweisaktivität: Das Konzept der Selbstwirksamkeit und Einstellungen zur Mathematik und zum Beweisen	56
2.2.1	Selbstwirksamkeit und Beweisen	56
2.2.2	Einstellungen zur Mathematik und das Beweisen	58
2.3	Argumentieren, Begründen und Beweisen	62
2.3.1	Argumentieren.....	62

2.3.2	Das Verhältnis zwischen Argumentation und Beweis.....	67
2.3.3	Begründen	71
2.3.4	Argumentieren, Begründen und Beweisen.....	72
2.4	Ausgewählte empirische Befunde zum Themenkomplex Beweisen	74
2.4.1	Beweisen bei Studienanfängerinnen und Studienanfängern.....	74
2.4.2	Akzeptanzaspekte beim Beweisen	77
2.4.3	Einstellungen zur Mathematik und das Beweisen	86
2.5	Beweisen als diagrammatisches Schließen.....	90
2.5.1	Der Vorgang des diagrammatischen Schließens	92
2.5.2	Exkurs: Eine semiotische Diskussion verschiedener Beweisprodukte	95
2.5.3	Die Güte eines Diagrammsystems	100
2.5.4	Die Rolle der fachmathematischen Sprache	100
2.6	Die Theorie sozio-mathematischer Normen.....	102
2.6.1	Theoretische Grundlagen sozio-mathematischer Normen.....	103
2.6.2	Sozio-mathematische Normen und Beweise	104
3	Forschungsmethode.....	107
3.1	Design-Based Research	107
3.2	Design-Based Research als der vorliegende Forschungsansatz	111
3.3	Instrumententwicklung.....	116
3.3.1	Erfassung von Begründungskompetenz zu Beginn des Studiums.....	116
3.3.2	Beweisbewertung als „richtiger Beweis“	120
3.3.3	Beweisakzeptanz	122
3.3.4	Erfassung der schulischen Vorerfahrungen zum Beweisen	127
3.3.5	Beweispräferenz	129
3.3.6	Einstellungen zum Beweisen in der Schule	130
3.3.7	Einstellungen zum Beweisen	132
3.3.8	Einstellungen zur Mathematik.....	134
3.3.9	Funktionen von Beweisen	136

3.3.10 Motivation zum Erlernen von Beweisen und Selbsteinschätzung des Lernzuwachses	139
3.3.11 Nutzen von Beispielen für den Beweisprozess	140
3.3.12 Selbstwirksamkeitserwartung und der empfundene Kompetenzzuwachs beim Beweisen	141
4 Betrachtungen zu der historischen Entwicklung didaktisch orientierter Beweiskonzepte und der mit ihnen verbundenen Intentionen	143
4.1 Anliegen, Forschungsfragen und Methode	143
4.2 Kurzdarstellung ausgewählter didaktisch orientierter Beweiskonzepte.....	144
4.2.1 Die intuitive Beweisstufe bei Benchara Branford.....	145
4.2.2 Paradigmatische Beispiele bei Hans Freudenthal	148
4.2.3 Der prämathematische Beweis bzw. der action proof bei Zbigniew Semadeni	150
4.2.4 Prämathematische Beweise bei Arnold Kirsch.....	152
4.2.5 Inhaltlich-anschauliche Beweise nach Erich Wittmann und Gerhard Müller.....	154
4.2.6 Präformale Beweise bei Arnold Kirsch und Werner Blum.....	155
4.3 Zusammenfassung der in der historischen Betrachtung herausgearbeiteten Aspekte zum Umgang mit didaktisch orientierten Beweiskonzepten	157
4.3.1 Empfohlene Aktivitäten für Lernende und Implikationen für den Unterricht	158
4.3.2 Argumente für die Einbindung didaktisch orientierter Beweiskonzepte in die Lehrerbildung	160
4.3.3 Probleme und offene Fragen bzgl. der didaktisch orientierten Beweiskonzepte.....	161
5 Die verschiedenen Durchführungen der Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik“ und die erfolgten Studien.....	163
5.1 Die Entstehung der Lehrveranstaltung, deren Einbettung in den Studienverlauf und die Rahmenbedingungen	164
5.2 Die Lehrveranstaltung im Wintersemester 2011/12 und die im Kontext dieser Durchführung erfolgten Studien	166

5.2.1	Die erste Durchführung der Lehrveranstaltung im Wintersemester 2011/12.....	166
5.2.2	Die im Kontext dieser Durchführung erfolgten Studien.....	182
5.2.3	Retrospektive Analyse der ersten Durchführung der Lehrveranstaltung .	191
5.3	Die Lehrveranstaltung im Wintersemester 2012/13 und die im Kontext dieser Durchführung erfolgten Studien	196
5.3.1	Veränderungen bei der zweiten Durchführung der Lehrveranstaltung im Wintersemester 2012/13	196
5.3.2	Die im Kontext dieser Durchführung erfolgten Studien.....	206
5.3.3	Retrospektive Analyse der zweiten Durchführung der Lehrveranstaltung.....	228
5.4	Die Lehrveranstaltung im Wintersemester 2013/14 und die im Kontext dieser Durchführung erfolgten Studien	231
5.4.1	Veränderungen bei der dritten Durchführung der Lehrveranstaltung im Wintersemester 2013/14	231
5.4.2	Die im Kontext dieser Durchführung erfolgten Studien.....	240
5.4.3	Retrospektive Analyse der dritten Durchführung der Lehrveranstaltung	273
5.4.4	Veränderungen bei der vierten Durchführung der Lehrveranstaltung im Wintersemester 2014/15	277
6	Die Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik“ im Wintersemester 2014/2015.....	281
6.1	Die intentionale Dimension der vierten Durchführung der Lehrveranstaltung im Wintersemester 2014/15	281
6.2	Die Gestaltung der ersten beiden Kapitel der Lehrveranstaltung im Wintersemester 2014/15.....	283
6.3	Der Übungsbetrieb.....	297
6.3.1	Die Präsenzübungen	297
6.3.2	Spezifische Übungsaufgaben	297
6.3.3	Die Zentralübung	302
7	Die empirischen Studien zur Lehrveranstaltung im Wintersemester 2014/15 ...	311
7.1	Datenerhebung und Messzeitpunkte	312

7.1.1	Messzeitpunkt 1: Die Eingangsbefragung zu Beginn der Lehrveranstaltung.....	314
7.1.2	Messzeitpunkt 2: Die Ausgangsbefragung zum Ende der Lehrveranstaltung.....	315
7.1.3	Messzeitpunkt 3: Die Modulklausur einen Monat nach Ende der Lehrveranstaltung.....	316
7.2	Teilstudie 1: Vorerfahrungen und Kompetenzen der Studierenden zum Beweisen und deren Einstellungen zum Beweisen und zur Mathematik zu Beginn der Lehrveranstaltung (bzw. zu Beginn des Studiums).....	317
7.2.1	Forschungsanliegen und Forschungsfragen	317
7.2.2	Ergebnisse bzgl. der Zusammensetzungen der Studierenden	323
7.2.3	Ergebnisse bzgl. der Vorerfahrungen der Studierenden mit Beweisen aus ihrer Schulzeit.....	331
7.2.4	Ergebnisse bzgl. der Kompetenzaspekte zum Beweisen.....	337
7.2.5	Ergebnisse bzgl. der Einstellungen zum Themenkomplex des Beweizens und zur Mathematik	364
7.3	Teilstudie 2: Ergebnisse der Ausgangsbefragung: Veränderungen durch die Lehrveranstaltung und wahrgenommener Lernzuwachs bzgl. des Beweizens bei den Studierenden.....	381
7.3.1	Forschungsanliegen und Forschungsfragen	383
7.3.2	Kompetenzaspekte zum Beweisen: Ergebnisse der Ausgangsbefragung und Veränderungen durch die Lehrveranstaltung	385
7.3.3	Ergebnisse bzgl. der Einstellungen zum Themenkomplex des Beweizens und zur Mathematik	397
7.3.4	Die Selbsteinschätzung der Studierenden bzgl. ihres Lernzuwachses in Bezug auf die Funktionen von Beweisen, auf den Nutzen von Beispielbetrachtungen für den Beweisprozess, auf die Konstruktion und den Umgang mit Beweisen und der Aspekt der Selbstwirksamkeitserwartung beim Beweisen.....	406
7.4	Teilstudie 3: Die Begründungen und Beweisproduktionen der Studierenden in der Modulabschlussklausur	417
7.4.1	Forschungsanliegen und Forschungsfragen	417

7.4.2 Methode und verwendete Aufgaben.....	418
7.4.3 Ergebnisse	420
7.5 Retrospektive Analyse der vierten Durchführung der Lehrveranstaltung im Wintersemester 2014/15.....	432
7.5.1 Zu dem Aspekt der sinnstiftenden Vermittlung der fachmathe- matischen Symbolsprache durch die Lehrveranstaltung	432
7.5.2 Zur Befähigung der Studierenden im Umgang mit nichtsymbolischen Darstellungen.....	433
7.5.3 Zur Verdeutlichung des Prozesscharakters der Mathematik	434
7.5.4 Zu der Herausbildung eines adäquaten Beweisverständnisses durch die Lehrveranstaltung.....	435
7.5.5 Fazit der retrospektiven Analyse	438
8 Zusammenfassung, Diskussion und Ausblick.....	439
8.1 Ergebnisse der Design-Forschung und der Beitrag zu einer lokalen Instruktionstheorie in der Domäne ‚Begründen und Beweisen‘	440
8.1.1 Der Beitrag zu einer lokalen Instruktionstheorie in der Domäne ‚Begründen und Beweisen‘ – die Formulierung von Designprinzipien	441
8.1.2 Die Entwicklung von Testinstrumenten	448
8.2 Empirische Ergebnisse aus der Effektivitätsstudie zur letzten in dieser Arbeit betrachteten Durchführung der Lehrveranstaltung im Wintersemester 2014/15.....	450
8.3 Weitere Beiträge der Arbeit über die Entwicklung einer lokalen Instruktionstheorie hinaus.....	454
8.3.1 Die Verbindung der Theorien „Diagrammatisches Schließen“ und „Sozio-mathematische Normen“	454
8.3.2 Die Betrachtung generischer Beweise als vollgültige mathematische Beweise.....	456
8.3.3 Die Enkulturationsfunktion von Beweisen	459
8.3.4 Wahrnehmung bzw. Akzeptanz von Beweisen	463
8.3.5 Proofs that explain – eine Diskussion	464
8.4 Diskussion des Forschungsprojekts anhand der aufgezeigten Gütekriterien ...	471

8.4.1 Diskussion der Forschungsmethode	471
8.4.2 Diskussion der Güte der Ergebnisse	474
8.5 Perspektiven für die Forschung	477
8.5.1 Perspektiven für eine adressatenspezifische Vermittlung von Lerninhalten.....	477
8.5.2 Perspektiven für die Beweisdidaktik	478
8.5.3 Schlussbemerkung.....	482
Literaturverzeichnis.....	483
Abbildungsverzeichnis.....	505
Tabellenverzeichnis.....	511