

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Généralités</b> .....	1
1.1	Théorie de Galois .....	1
1.1.1	Corps $l$ -spéciaux .....	1
1.1.2	Restriction des scalaires à la Weil .....	2
1.1.3	Cohomologie galoisienne non abélienne .....	2
1.1.4	Algèbres étales et algèbres galoisiennes .....	4
1.1.5	Caractères .....	4
1.1.6	Algèbres simples centrales .....	5
1.1.7	Algèbres simples centrales cycliques .....	5
1.2	Groupes algébriques affines .....	6
1.2.1	Groupes diagonalisables et groupes de type multiplicatif ....	6
1.2.2	Tores .....	7
1.3	Cohomologie galoisienne .....	8
1.3.1	Dimension cohomologique .....	8
1.3.2	Cohomologie galoisienne des groupes unipotents déployés .....	9
1.4	Cohomologie plate .....	9
1.5	Cohomologie étale, toseurs .....	10
1.5.1	Torseurs .....	10
1.5.2	Tores flasques .....	10
1.6	$R$ -équivalence .....	11
1.6.1	Définition .....	11
1.6.2	Deux variantes: la $R_0$ et la $R_1$ -équivalence .....	13
1.6.3	Un exemple .....	15
<b>2</b>	<b>Groupes réductifs</b> .....	17
2.1	Définitions .....	17
2.1.1	Groupes unipotents et résolubles .....	17
2.1.2	Radicaux .....	17
2.1.3	Sous-groupes paraboliques .....	19

2.1.4	Sous-groupes de Borel, couples de Killing .....	20
2.1.5	Systèmes de racines relatifs .....	20
2.2	Classification par la cohomologie galoisienne .....	21
2.2.1	L'invariant * .....	21
2.2.2	Formes intérieures et fortement intérieures .....	21
2.2.3	Cohomologie galoisienne et sous-groupes paraboliques .....	22
2.2.4	Classes de Tits .....	22
2.3	Sous-groupes réductifs de rang maximal .....	24
2.3.1	Sous-groupes maximaux .....	24
2.3.2	Construction de $G_{S,T}$ .....	25
2.3.3	Intersection de groupes paraboliques .....	26
2.4	Résolutions flasques .....	27
	Notes .....	27
<b>3</b>	<b>Sous-groupes des groupes algébriques, déploiement</b> .....	<b>29</b>
3.1	Plongements de sous-groupes de type multiplicatif et leurs centralisateurs .....	29
3.1.1	Lissité des centralisateurs, sous-groupes toraux .....	29
3.1.2	Coordonnées de Kac .....	31
3.1.3	Points fixes sur la variété des couples de Killing .....	36
3.2	Existence de sous-groupes, méthode de Harder .....	39
3.2.1	Intersection générique de sous-groupes paraboliques .....	39
3.2.2	Descente d'intersection transversale de sous-groupes paraboliques .....	40
3.2.3	L'exemple du groupe linéaire .....	41
3.2.4	Cas quadratique .....	42
3.2.5	Cas cubique .....	44
3.2.6	Le cas parfait .....	46
3.2.7	Construction de sous-groupes par la cohomologie galoisienne .....	46
3.3	Déploiement des groupes semi-simples .....	48
3.4	Quasi-déploiement et 0-cycles de degré 1 .....	50
	Notes .....	53
<b>4</b>	<b>Dimension cohomologique séparable</b> .....	<b>55</b>
4.1	Groupes de normes séparables, cas des variétés de Severi-Brauer ...	55
4.2	Rappels de cohomologie galoisienne .....	60
4.3	Groupes de cohomologie galoisienne modifiés de Kato .....	61
4.4	Globalisation .....	64
4.5	Dimension cohomologique séparable .....	65
4.6	Caractérisation des corps de dimension cohomologique séparable $\leq 1$ .....	66
4.7	Caractérisation des corps de dimension cohomologique séparable $\leq 2$ .....	69
4.8	Conjectures I et II de Serre, le type A intérieur .....	71

<b>5</b>	<b>Tores algébriques, Conjecture I et groupes de normes</b> .....	75
5.1	Rappels sur les groupes algébriques et leurs tores maximaux .....	75
5.2	Classes de conjugaison rationnelles, application à la conjecture I....	77
5.3	Groupes de normes des variétés de sous-groupes de Borel .....	81
5.4	Conjecture II, normes et isogénies .....	81
5.5	Classes provenant de sous-groupes diagonalisables .....	84
5.6	Application à la descente quadratique .....	86
5.7	Sur la $R_1$ -équivalence .....	88
	Notes .....	89
<b>6</b>	<b>Conjecture II, le cas quasi-déployé</b> .....	91
6.1	Groupes classiques quasi-déployés.....	91
6.2	Groupes exceptionnels quasi-déployés.....	92
<b>7</b>	<b>Groupes classiques</b> .....	95
7.1	Formes bilinéaires et quadratiques .....	95
7.1.1	Formes quadratiques de Pfister .....	96
7.1.2	Algèbres de Clifford .....	96
7.1.3	Le théorème de Sivatski .....	98
7.1.4	Dimension cohomologique séparable en 2 .....	100
7.1.5	Autres formes quadratiques .....	102
7.1.6	Le cas de type $B$ et des groupes de spineurs .....	103
7.2	Le cas symplectique.....	104
7.3	Le cas unitaire (type ${}^2A_{n-1}$ ).....	106
7.4	Le cas de type $D$ .....	107
7.4.1	Paires quadratiques et leurs relèvements hermitiens .....	107
7.4.2	Classification .....	115
7.4.3	Produit tensoriel .....	117
7.4.4	Cas où $D$ est une $k$ -algèbre de biquaternions .....	118
	Notes .....	119
<b>8</b>	<b>Groupes exceptionnels</b> .....	121
8.1	Cas trialitaire .....	121
8.1.1	Quaternions et trialité .....	122
8.1.2	Application à la conjecture II .....	127
8.2	Type $E_6$ .....	128
8.2.1	Algèbres de degré 3.....	129
8.2.2	Application à la conjecture II .....	131
8.3	Type $E_7$ .....	132
8.3.1	Groupes de type $E_7$ , quaternions .....	132
8.3.2	Le résultat principal.....	133
8.3.3	Une stratégie possible .....	135
8.4	Type $E_8$ .....	137
<b>9</b>	<b>Applications</b> .....	143
9.1	Petits indices .....	143
9.2	Corps $C'^2$ .....	144

9.3	Élucubrations autour de $E_8$ .....	145
9.3.1	Question d'injectivité de Serre .....	145
9.3.2	Question de Bogomolov .....	145
9.3.3	Groupes presque abéliens .....	146
9.4	Classification des groupes semi-simples .....	147
9.5	Autres résultats .....	148
9.5.1	La $R$ -équivalence .....	148
9.5.2	Sous-groupes unipotents .....	148
<b>Appendice : Indices de Tits</b> .....		149
<b>Bibliographie</b> .....		157
<b>Index</b> .....		167