

## Inhaltsverzeichnis

Analytische Geometrie in der Ebene . . . . .		21
§ 1. Grundsätzliches über die analytische Geometrie . . . . .		21
§ 2. Koordinaten . . . . .		22
§ 3. Rechtwinkliges Koordinatensystem . . . . .		22
§ 4. Rechtwinklige Koordinaten . . . . .		23
§ 5. Winkelbereiche oder Quadranten . . . . .		24
§ 6. Schiefwinkliges Koordinatensystem . . . . .		25
§ 7. Die Geradengleichung . . . . .		25
§ 8. Gegenseitige Lage von Punkt und Kurve . . . . .		27
§ 9. Gegenseitige Lage zweier Kurven . . . . .		27
§ 10. Der Abstand zwischen zwei Punkten . . . . .		28
§ 11. Teilabschnitte mit gegebenem Verhältnis . . . . .		28
§ 12. Die Determinante zweiter Ordnung . . . . .		30
§ 13. Der Flächeninhalt eines Dreiecks . . . . .		30
§ 14. Die Geradengleichung in der nach $y$ aufgelösten Form . . . . .		31
§ 15. Achsenparallele Geraden . . . . .		33
§ 16. Die allgemeine Geradengleichung . . . . .		34
§ 17. Konstruktion einer Geraden aus ihrer Gleichung . . . . .		35
§ 18. Parallelitätsbedingung für Geraden . . . . .		36
§ 19. Schnittpunkte von Geraden . . . . .		37
§ 20. Bedingung für die Orthogonalität zweier Geraden . . . . .		38
§ 21. Der Winkel zwischen zwei Geraden . . . . .		39
§ 22. Bedingung dafür, daß drei Punkte auf einer Geraden liegen . . . . .		42
§ 23. Gleichung einer Geraden durch zwei gegebene Punkte . . . . .		42
§ 24. Geradenbüschel . . . . .		43
§ 25. Die Gleichung einer Geraden, die parallel zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt verläuft . . . . .		46
§ 26. Die Gleichung einer Geraden durch einen gegebenen Punkt und orthogonal zu einer gegebenen Geraden . . . . .		46
§ 27. Gegenseitige Lage einer Geraden und eines Punktpaares . . . . .		47
§ 28. Der Abstand eines Punktes von einer Geraden . . . . .		47
§ 29. Die Polarparameter der Geraden . . . . .		49
§ 30. Die Normalform der Geradengleichung . . . . .		51
§ 31. Die Bestimmung der Geradengleichung in Normalform . . . . .		52
§ 32. Achsenabschnitte . . . . .		53
§ 33. Die Abschnittsgleichung der Geraden . . . . .		54
§ 34. Koordinatentransformation (Erläuterung der Methode) . . . . .		54
§ 35. Verschiebung des Koordinatenursprungs . . . . .		55

§ 36. Achsendrehung . . . . .	56
§ 37. Algebraische Kurven und ihr Grad . . . . .	58
§ 38. Der Kreis. . . . .	59
§ 39. Bestimmung des Mittelpunktes und des Radius eines Kreises . . . . .	60
§ 40. Die Ellipse als gestauchter Kreis. . . . .	62
§ 41. Eine zweite Definition der Ellipse . . . . .	64
§ 42. Konstruktion einer Ellipse aus ihren Achsen . . . . .	66
§ 43. Die Hyperbel . . . . .	67
§ 44. Die Form einer Hyperbel. Scheitel und Achsen . . . . .	69
§ 45. Konstruktion einer Hyperbel aus ihren Achsen . . . . .	71
§ 46. Die Asymptoten der Hyperbel. . . . .	71
§ 47. Konjugierte Hyperbeln . . . . .	73
§ 48. Die Parabel . . . . .	73
§ 49. Konstruktion einer Parabel bei gegebenem Parameter $p$ . . . . .	75
§ 50. Die Parabel als Kurve mit der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ . . . . .	75
§ 51. Die Leitlinien einer Ellipse und einer Hyperbel . . . . .	79
§ 52. Allgemeine Definition von Ellipse, Hyperbel und Parabel . . . . .	80
§ 53. Kegelschnitte . . . . .	83
§ 54. Die Durchmesser eines Kegelschnitts . . . . .	84
§ 55. Die Durchmesser der Ellipse . . . . .	85
§ 56. Die Durchmesser der Hyperbel . . . . .	87
§ 57. Die Durchmesser der Parabel . . . . .	89
§ 58. Kurven zweiten Grades. . . . .	90
§ 59. Die Form der allgemeinen Gleichung zweiten Grades . . . . .	91
§ 60. Vereinfachung der Gleichung zweiten Grades. Allgemeine Bemerkungen . . . . .	92
§ 61. Vorläufige Transformation der Gleichung zweiten Grades . . . . .	92
§ 62. Endgültige Transformation der Gleichung zweiten Grades . . . . .	95
§ 63. Über Verfahren zur Erleichterung der Vereinfachung von Gleichungen zweiten Grades. . . . .	101
§ 64. Kriterium für den Zerfall einer Kurve zweiten Grades . . . . .	102
§ 65. Die Bestimmung der Geraden, aus denen eine zerfallende Kurve zweiter Ordnung besteht . . . . .	103
§ 66. Die Invarianten einer Gleichung zweiten Grades . . . . .	106
§ 67. Die drei Typen von Kurven zweiten Grades . . . . .	108
§ 68. Zentralsymmetrische und nichtzentralsymmetrische Kurven zweiten Grades . . . . .	111
§ 69. Die Bestimmung des Zentrums zentralsymmetrischer Kurven zweiter Ordnung . . . . .	112
§ 70. Die Vereinfachung der Gleichung einer zentralsymmetrischen Kurve zweiter Ordnung . . . . .	114
§ 71. Die gleichseitige Hyperbel als grafische Darstellung der Gleichung $y = \frac{k}{x}$ . . . . .	116
§ 72. Die gleichseitige Hyperbel als grafische Darstellung der Gleichung $y = \frac{mx + n}{px + q}$ . . . . .	117
§ 73. Polarkoordinaten . . . . .	119

§ 74. Die Beziehung zwischen Polarkoordinaten und rechtwinkligen Koordinaten . . . . .	122
§ 75. Die Archimedische Spirale . . . . .	124
§ 76. Die Polargleichung der Geraden . . . . .	126
§ 77. Die Polargleichung eines Kegelschnitts . . . . .	126
 Analytische Geometrie im Raum . . . . .	 128
§ 78. Grundsätzliches über Vektoren und Skalare . . . . .	128
§ 79. Der Vektor in der Geometrie . . . . .	128
§ 80. Vektoralgebra . . . . .	129
§ 81. Kollineare Vektoren . . . . .	129
§ 82. Der Nullvektor . . . . .	130
§ 83. Die Gleichheit von Vektoren . . . . .	130
§ 84. Die Rückführung von Vektoren auf einen gemeinsamen Anfangspunkt . . . . .	131
§ 85. Entgegengesetzte Vektoren . . . . .	131
§ 86. Vektoraddition . . . . .	132
§ 87. Die Summe mehrerer Vektoren . . . . .	133
§ 88. Die Vektorsubtraktion . . . . .	134
§ 89. Die Multiplikation und Division eines Vektors mit einer Zahl . . . . .	135
§ 90. Beziehungen zwischen kollinearen Vektoren (Division eines Vektors durch einen anderen) . . . . .	137
§ 91. Die Projektion eines Punktes auf eine Achse . . . . .	137
§ 92. Die Projektion eines Vektors auf eine Achse . . . . .	138
§ 93. Grundlegende Theoreme über die Projektionen eines Vektors . . . . .	140
§ 94. Rechtwinkliges Koordinatensystem im Raum . . . . .	141
§ 95. Die Koordinaten eines Punktes . . . . .	143
§ 96. Die Koordinaten eines Vektors . . . . .	144
§ 97. Die Darstellung eines Vektors durch Komponenten und durch Koordinaten . . . . .	145
§ 98. Operationen mit Vektoren, die durch ihre Koordinaten gegeben sind . . . . .	145
§ 99. Die Darstellung eines Vektors durch die Radiusvektoren seines Anfangs- und Endpunktes . . . . .	146
§ 100. Die Länge eines Vektors. Der Abstand zwischen zwei Punkten . . . . .	147
§ 101. Der Winkel zwischen den Koordinatenachsen und einem Vektor . . . . .	147
§ 102. Ein Kriterium für die Kollinearität (Parallelität) von Vektoren . . . . .	148
§ 103. Die Teilung einer Strecke in gegebenem Verhältnis . . . . .	149
§ 104. Das Skalarprodukt zweier Vektoren . . . . .	149
§ 105. Eigenschaften des Skalarprodukts . . . . .	151
§ 106. Die Skalarprodukte der Achsenvektoren . . . . .	153
§ 107. Die Darstellung des Skalarprodukts durch die Koordinaten der Faktoren . . . . .	153
§ 108. Die Bedingung für die Orthogonalität von Vektoren . . . . .	154
§ 109. Der Winkel zwischen Vektoren . . . . .	154

§ 110.	Rechts- und Linkssysteme von drei Vektoren . . . . .	155
§ 111.	Das Vektorprodukt zweier Vektoren . . . . .	157
§ 112.	Die Eigenschaften des Vektorprodukts . . . . .	159
§ 113.	Die Vektorprodukte der Achsenvektoren. . . . .	160
§ 114.	Die Darstellung des Vektorprodukts durch die Koordinaten der Faktoren . . . . .	161
§ 115.	Komplanare Vektoren . . . . .	163
§ 116.	Das gemischte Produkt . . . . .	163
§ 117.	Die Eigenschaften des gemischten Produktes . . . . .	164
§ 118.	Die Determinante dritter Ordnung . . . . .	165
§ 119.	Die Darstellung des gemischten Produktes durch die Koordinaten seiner Faktoren . . . . .	167
§ 120.	Kriterium für die Komplanarität in Koordinatenform . . . . .	168
§ 121.	Das Volumen eines Parallelepipeds . . . . .	168
§ 122.	Das doppelte Vektorprodukt . . . . .	169
§ 123.	Die Gleichung einer Ebene . . . . .	169
§ 124.	Spezialfälle der Lage von Ebenen bezüglich des Koordinatensystems . . . . .	170
§ 125.	Die Bedingung für die Parallelität von Ebenen . . . . .	171
§ 126.	Die Bedingung für die Orthogonalität zweier Ebenen . . . . .	172
§ 127.	Der Winkel zwischen zwei Ebenen . . . . .	173
§ 128.	Die Gleichung einer Ebene durch einen gegebenen Punkt und parallel zu einer gegebenen Ebene . . . . .	173
§ 129.	Bestimmung einer Ebene durch drei Punkte . . . . .	174
§ 130.	Achsenabschnitte . . . . .	174
§ 131.	Die Abschnittsgleichung einer Ebene . . . . .	175
§ 132.	Die Gleichung einer Ebene durch zwei Punkte und orthogonal zu einer gegebenen Ebene . . . . .	175
§ 133.	Die Gleichung einer Ebene durch einen gegebenen Punkt und orthogonal zu zwei Ebenen . . . . .	176
§ 134.	Der Schnittpunkt dreier Ebenen . . . . .	177
§ 135.	Gegenseitige Lage von Ebene und Punktepaar . . . . .	178
§ 136.	Der Abstand zwischen Punkt und Ebene . . . . .	179
§ 137.	Die Polarparameter der Ebene . . . . .	179
§ 138.	Die Normalform der Ebenengleichung . . . . .	181
§ 139.	Die Bestimmung der Ebenengleichung in Normalform . . . . .	182
§ 140.	Die Gleichung einer Geraden im Raum . . . . .	183
§ 141.	Bedingung dafür, daß zwei Gleichungen ersten Grades eine Gerade darstellen . . . . .	185
§ 142.	Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene . . . . .	186
§ 143.	Richtungsvektoren . . . . .	187
§ 144.	Der Winkel zwischen einer Geraden und den Koordinatenachsen . . . . .	188
§ 145.	Der Winkel zwischen zwei Geraden . . . . .	189
§ 146.	Der Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene . . . . .	189
§ 147.	Die Bedingungen für die Parallelität und Orthogonalität zwischen Gerade und Ebene . . . . .	190
§ 148.	Ebenenbüschel . . . . .	190
§ 149.	Die Projektionen einer Geraden auf die Koordinatenebenen . . . . .	192
§ 150.	Die symmetrischen Geradengleichungen . . . . .	194

§ 151.	Die Bestimmung der Geradengleichungen in symmetrischer Form . . . . .	196
§ 152.	Die Parameterdarstellung der Geraden . . . . .	197
§ 153.	Der Schnitt einer Ebene mit einer Geraden in Parameterform . . . . .	197
§ 154.	Die Gleichung einer Geraden durch zwei gegebene Punkte . . . . .	198
§ 155.	Die Gleichung einer Ebene durch einen gegebenen Punkt senkrecht zu einer gegebenen Geraden . . . . .	198
§ 156.	Die Gleichung einer Geraden durch einen gegebenen Punkt senkrecht zu einer gegebenen Ebene . . . . .	199
§ 157.	Die Gleichung einer Ebene durch einen gegebenen Punkt und durch eine gegebene Gerade . . . . .	199
§ 158.	Die Gleichung einer Ebene durch einen gegebenen Punkt und parallel zu zwei gegebenen Geraden . . . . .	200
§ 159.	Die Gleichung einer Ebene durch eine gegebene Gerade und parallel zu einer anderen gegebenen Geraden . . . . .	201
§ 160.	Die Gleichung einer Ebene durch eine gegebene Gerade senkrecht zu einer gegebenen Ebene . . . . .	201
§ 161.	Die Gleichung der Senkrechten von einem gegebenen Punkt auf eine gegebene Gerade . . . . .	202
§ 162.	Die Länge der Senkrechten von einem gegebenen Punkt auf eine gegebene Gerade . . . . .	203
§ 163.	Die Bedingungen dafür, daß sich zwei Gerade schneiden oder in einer Ebene liegen . . . . .	204
§ 164.	Die Gleichung einer Geraden, die senkrecht zu zwei gegebenen Geraden ist. . . . .	206
§ 165.	Der kürzeste Abstand zwischen zwei Geraden. Richtung von Geraden . . . . .	208
§ 166.	Koordinatentransformation . . . . .	210
§ 167.	Die Gleichung einer Fläche . . . . .	211
§ 168.	Zylinderflächen, deren Erzeugende parallel zu einer der Koordinatenachsen sind . . . . .	212
§ 169.	Die Gleichung einer Kurve . . . . .	213
§ 170.	Die Projektion einer Kurve auf die Koordinatenachse . . . . .	214
§ 171.	Algebraische Flächen und ihr Grad . . . . .	217
§ 172.	Die Kugelfläche . . . . .	217
§ 173.	Das Ellipsoid . . . . .	218
§ 174.	Das einschalige Hyperboloid . . . . .	221
§ 175.	Das zweischalige Hyperboloid . . . . .	223
§ 176.	Der Kegel zweiter Ordnung . . . . .	225
§ 177.	Das elliptische Paraboloid . . . . .	227
§ 178.	Das hyperbolische Paraboloid . . . . .	229
§ 179.	Die Flächen zweiten Grades . . . . .	230
§ 180.	Geradlinige Erzeugende der Flächen zweiten Grades. . . . .	233
§ 181.	Rotationsflächen . . . . .	234
§ 182.	Determinanten zweiter und dritter Ordnung . . . . .	235
§ 183.	Determinanten höherer Ordnung . . . . .	238
§ 184.	Eigenschaften der Determinanten . . . . .	240
§ 185.	Ein praktisches Verfahren zur Berechnung von Determinanten . . . . .	242
§ 186.	Anwendung der Determinanten auf die Untersuchung und Lösung von Gleichungssystemen . . . . .	244

§ 187. Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten . . . . .	244
§ 188. Zwei Gleichungen und drei Unbekannte . . . . .	246
§ 189. Das homogene System von zwei Gleichungen mit drei Un- bekannten . . . . .	247
§ 190. Drei Gleichungen mit drei Unbekannten. $n$ Gleichungen .	249
 Die Grundbegriffe der mathematischen Analysis . . . . .	 255
§ 191. Einführende Bemerkungen . . . . .	255
§ 192. Die rationalen Zahlen . . . . .	256
§ 193. Die reellen Zahlen . . . . .	256
§ 194. Die Zahlengerade . . . . .	257
§ 195. Variable und konstante Größen. . . . .	257
§ 196. Funktionen . . . . .	258
§ 197. Methoden zur Angabe einer Funktion . . . . .	259
§ 198. Der Definitionsbereich einer Funktion . . . . .	261
§ 199. Intervalle . . . . .	262
§ 200. Klassifikation der Funktionen . . . . .	264
§ 201. Die wichtigsten elementaren Funktionen. . . . .	264
§ 202. Die Bezeichnung von Funktionen . . . . .	265
§ 203. Der Grenzwert einer Folge . . . . .	266
§ 204. Der Grenzwert von Funktionen. . . . .	268
§ 205. Die Definition des Grenzwerts einer Funktion . . . . .	270
§ 206. Der Grenzwert einer konstanten Größe . . . . .	270
§ 207. Unendlich kleine Größen . . . . .	270
§ 208. Unendlich große Größen . . . . .	271
§ 209. Die Beziehung zwischen unendlich großen und unendlich kleinen Größen . . . . .	271
§ 210. Beschränkte Größen . . . . .	272
§ 211. Erweiterung des Grenzwertbegriffs . . . . .	272
§ 212. Die Grundeigenschaften von unendlich kleinen Größen .	273
§ 213. Die Grundtheoreme über Grenzwerte . . . . .	274
§ 214. Die Zahl $e$ . . . . .	275
§ 215. Der Grenzwert $\frac{\sin x}{x}$ für $x \rightarrow 0$ . . . . .	276
§ 216. Äquivalente unendlich kleine Größen . . . . .	277
§ 217. Vergleich von unendlich kleinen Größen . . . . .	278
§ 218. Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt . . . . .	280
§ 219. Eigenschaften von Funktionen, die in einem Punkt stetig sind. . . . .	281
§ 220. Stetigkeit einer Funktion in einem geschlossenen Inter- vall. . . . .	282
§ 221. Eigenschaften von Funktionen, die in einem abgeschlos- senen Intervall stetig sind . . . . .	283
 Differentialrechnung . . . . .	 285
§ 222. Einführende Bemerkungen . . . . .	285
§ 223. Die Geschwindigkeit . . . . .	285
§ 224. Die Definition der Ableitung einer Funktion . . . . .	286

§ 225.	Die Tangente . . . . .	288
§ 226.	Die Ableitungen einiger einfacher Funktionen . . . . .	289
§ 227.	Eigenschaften der Ableitung . . . . .	290
§ 228.	Das Differential . . . . .	291
§ 229.	Die mechanische Deutung des Differentials . . . . .	292
§ 230.	Die geometrische Bedeutung des Differentials . . . . .	292
§ 231.	Differenzierbare Funktionen . . . . .	293
§ 232.	Die Differentiale einiger einfacher Funktionen . . . . .	295
§ 233.	Die Eigenschaften des Differentials . . . . .	296
§ 234.	Die Invarianz des Ausdrucks $f'(x) dx$ . . . . .	296
§ 235.	Beschreibung der Ableitung durch Differentiale . . . . .	297
§ 236.	Zusammengesetzte Funktionen . . . . .	298
§ 237.	Das Differential einer zusammengesetzten Funktion . . . . .	298
§ 238.	Die Ableitung einer zusammengesetzten Funktion („Kettenregel“) . . . . .	299
§ 239.	Die Differentiation eines Produkts . . . . .	299
§ 240.	Die Differentiation eines Quotienten . . . . .	300
§ 241.	Die Umkehrfunktion . . . . .	301
§ 242.	Der natürliche Logarithmus . . . . .	303
§ 243.	Die Differentiation des Logarithmus . . . . .	304
§ 244.	Die logarithmische Differentiation . . . . .	305
§ 245.	Die Differentiation der Exponentialfunktion . . . . .	306
§ 246.	Die Differentiation der trigonometrischen Funktionen . . . . .	307
§ 247.	Die Differentiation der Umkehrfunktionen . . . . .	307
§ 248.	Das Differential in der Näherungsrechnung . . . . .	308
§ 249.	Anwendung der Differentialrechnung auf die Fehlerabschätzung . . . . .	310
§ 250.	Differentiation impliziter Funktionen . . . . .	311
§ 251.	Eine in Parameterform gegebene Kurve . . . . .	313
§ 252.	In Parameterform gegebene Funktionen . . . . .	315
§ 253.	Die Zykloide . . . . .	317
§ 254.	Die Gleichung der Tangente an eine ebene Kurve . . . . .	318
§ 255.	Die Gleichung der Normalen . . . . .	320
§ 256.	Ableitungen höherer Ordnung . . . . .	321
§ 257.	Die Bedeutung der zweiten Ableitung in der Mechanik . . . . .	322
§ 258.	Differentiale höherer Ordnung . . . . .	323
§ 259.	Darstellung der höheren Ableitungen durch Differentiale . . . . .	325
§ 260.	Höhere Ableitungen von Funktionen, die in Parameterform gegeben sind . . . . .	325
§ 261.	Höhere Ableitungen impliziter Funktionen . . . . .	326
§ 262.	Die LEIBNIZSche Regel . . . . .	327
§ 263.	Der Satz von ROLLE . . . . .	328
§ 264.	Der Mittelwertsatz von LAGRANGE . . . . .	329
§ 265.	Die Formel für einen endlichen Zuwachs . . . . .	331
§ 266.	Die Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes (CAUCHY) . . . . .	333
§ 267.	Untersuchung eines unbestimmten Ausdrucks der Form $\frac{0}{0}$ . . . . .	335
§ 268.	Untersuchung eines unbestimmten Ausdrucks der Form $\frac{\infty}{\infty}$ . . . . .	338
§ 269.	Unbestimmte Ausdrücke anderer Form . . . . .	338

§ 270. Historische Betrachtungen über die TAYLORSche Formel . . . . .	340
§ 271. Die TAYLOR-Formel . . . . .	344
§ 272. Anwendung der TAYLOR-Formel auf die Berechnung von Funktionswerten . . . . .	346
§ 273. Zunehmende und abnehmende Funktionen . . . . .	353
§ 274. Kriterien für die Zunahme oder Abnahme einer Funktion in einem Punkt. . . . .	355
§ 275. Maximum und Minimum . . . . .	356
§ 276. Notwendige Bedingung für ein Maximum oder ein Minimum . . . . .	357
§ 277. Erste hinreichende Bedingung für ein Maximum oder Minimum . . . . .	358
§ 278. Regel für die Bestimmung der Maxima und Minima . . . . .	359
§ 279. Zweite hinreichende Bedingung für Maxima und Minima. . . . .	363
§ 280. Die Bestimmung des größten und des kleinsten Werts einer Funktion . . . . .	365
§ 281. Die Konvexität ebener Kurven. Wendepunkte . . . . .	368
§ 282. Die konkave Seite . . . . .	368
§ 283. Regel für die Bestimmung eines Wendepunkts . . . . .	370
§ 284. Die Asymptoten . . . . .	371
§ 285. Die Untersuchung von Asymptoten, die parallel zu den Koordinatenachsen sind . . . . .	372
§ 286. Untersuchung der Asymptoten, die nicht zur Ordinatenachse parallel sind . . . . .	374
§ 287. Verfahren zur Konstruktion von grafischen Darstellungen . . . . .	375
§ 288. Lösung von Gleichungen. Allgemeine Bemerkungen . . . . .	381
§ 289. Die Lösung von Gleichungen. Die Sehnenmethode . . . . .	382
§ 290. Die Lösung von Gleichungen. Die Tangentenmethode . . . . .	384
§ 291. Kombination der Sehnenmethode mit der Tangentenmethode . . . . .	386
 Integralrechnung . . . . .	 389
§ 292. Einführende Bemerkungen . . . . .	389
§ 293. Die Stammfunktion . . . . .	391
§ 294. Das unbestimmte Integral . . . . .	392
§ 295. Geometrische Erklärung der Integration . . . . .	393
§ 296. Berechnung der Integrationskonstanten aus den Anfangsdaten . . . . .	396
§ 297. Eigenschaften des unbestimmten Integrals . . . . .	397
§ 298. Integraltafel . . . . .	398
§ 299. Unbestimmte Integration . . . . .	400
§ 300. Die Substitutionsmethode (Integration unter Verwendung einer Hilfsvariablen) . . . . .	400
§ 301. Partielle Integration . . . . .	402
§ 302. Integration einiger trigonometrischer Ausdrücke . . . . .	403
§ 303. Trigonometrische Transformationen . . . . .	407
§ 304. Rationale Funktionen . . . . .	408
§ 305. Verfahren zur Integration von gebrochenen rationalen Funktionen . . . . .	409
§ 306. Die Integration von Partialbrüchen . . . . .	410



§ 307.	Die Integration rationaler Funktionen (allgemeine Methode)	413
§ 308.	Die Faktorenerlegung eines Polynoms . . . . .	419
§ 309.	Über die Integrierbarkeit der elementaren Funktionen	420
§ 310.	Einige von Radikalen abhängige Integrale . . . . .	421
§ 311.	Das Integral eines Binomialausdrucks . . . . .	422
§ 312.	Integrale der Form $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ . . . . .	424
§ 313.	Integrale der Form $\int R(\sin x, \cos x) dx$ . . . . .	426
§ 314.	Das bestimmte Integral . . . . .	426
§ 315.	Eigenschaften des bestimmten Integrals . . . . .	431
§ 316.	Die geometrische Deutung des bestimmten Integrals . . . . .	432
§ 317.	Deutung des bestimmten Integrals in der Mechanik . . . . .	434
§ 318.	Abschätzung des bestimmten Integrals . . . . .	435
§ 319.	Der Mittelwertsatz der Integralrechnung. . . . .	436
§ 320.	Das bestimmte Integral als Funktion seiner oberen Grenze . . . . .	438
§ 321.	Das Differential eines Integrals . . . . .	439
§ 322.	Das Integral eines Differentials. Die Formel von NEWTON-LEIBNIZ . . . . .	441
§ 323.	Die Berechnung des bestimmten Integrals mit Hilfe des unbestimmten Integrals . . . . .	442
§ 324.	Partielle bestimmte Integration . . . . .	443
§ 325.	Substitutionsmethoden bei der bestimmten Integration . . . . .	444
§ 326.	Uneigentliche Integrale . . . . .	445
§ 327.	Integrale mit unendlichen Grenzen . . . . .	446
§ 328.	Integrale über Funktionen mit Unstetigkeitsstellen . . . . .	450
§ 329.	Über die näherungsweise Berechnung eines Integrals . . . . .	453
§ 330.	Rechtecksformeln . . . . .	455
§ 331.	Die Trapezformel . . . . .	457
§ 332.	Die SIMPSONSche Formel (Parabolische Trapezformel) . . . . .	458
§ 333.	Der Flächeninhalt von Figuren, die durch rechtwinklige Koordinaten beschrieben werden . . . . .	460
§ 334.	Übersicht über die Anwendung des bestimmten Integrals	462
§ 335.	Der Flächeninhalt von Figuren, die durch Polarkoordinaten gegeben sind . . . . .	463
§ 336.	Das Volumen eines Körpers . . . . .	465
§ 337.	Das Volumen eines Rotationskörpers . . . . .	467
§ 338.	Die Bogenlänge einer ebenen Kurve . . . . .	468
§ 339.	Das Differential der Bogenlänge . . . . .	469
§ 340.	Die Bogenlänge und ihr Differential in Polarkoordinaten	470
§ 341.	Der Flächeninhalt einer Rotationsfläche . . . . .	472
Überblick über ebene und räumliche Kurven. . . . .		474
§ 342.	Die Krümmung . . . . .	474
§ 343.	Krümmungsmittelpunkt, Krümmungsradius und Krümmungskreis einer ebenen Kurve. . . . .	475
§ 344.	Formeln für die Krümmung, den Krümmungsradius und den Krümmungsmittelpunkt einer ebenen Kurve . . . . .	477
§ 345.	Die Evolute einer ebenen Kurve . . . . .	480
§ 346.	Eigenschaften der Evolute einer ebenen Kurve . . . . .	482

§ 347. Die Evolvente einer ebenen Kurve . . . . .	483
§ 348. Die Parameterform von Raumkurven . . . . .	483
§ 349. Schraubenlinien . . . . .	485
§ 350. Die Bogenlänge einer Raumkurve. . . . .	487
§ 351. Die Tangente an eine Raumkurve . . . . .	488
§ 352. Die Normalebene . . . . .	490
§ 353. Vektorfunktionen mit skalarem Argument . . . . .	491
§ 354. Grenzwerte von Vektorfunktionen . . . . .	492
§ 355. Die Ableitung einer Vektorfunktion . . . . .	492
§ 356. Das Differential einer Vektorfunktion . . . . .	494
§ 357. Eigenschaften der Ableitungen und der Differentiale von Vektorfunktionen . . . . .	495
§ 358. Die Schmiegebene . . . . .	497
§ 359. Die Hauptnormale. Das begleitende Dreibein . . . . .	499
§ 360. Gegenseitige Lage von Kurve und Ebene . . . . .	500
§ 361. Die Einheitsvektoren des begleitenden Dreibeins . . . . .	500
§ 362. Krümmungsmittelpunkt, Krümmungsachse und Krüm- mungsradius einer Raumkurve . . . . .	502
§ 363. Formeln für die Krümmung, den Krümmungsradius und den Krümmungsmittelpunkt von Raumkurven . . . . .	503
§ 364. Über das Vorzeichen der Krümmung . . . . .	505
§ 365. Die Torsion . . . . .	505
Unendliche Reihen . . . . .	508
§ 366. Einführende Bemerkungen . . . . .	508
§ 367. Definition der unendlichen Reihe . . . . .	508
§ 368. Konvergente und divergente unendliche Reihen . . . . .	509
§ 369. Notwendige Bedingung für die Konvergenz einer unend- lichen Reihe . . . . .	510
§ 370. Der Rest einer unendlichen Reihe. . . . .	512
§ 371. Einfache Operationen mit unendlichen Reihen . . . . .	514
§ 372. Positive unendliche Reihen . . . . .	515
§ 373. Vergleich von positiven Reihen . . . . .	516
§ 374. Das D'ALEMBERTSche Kriterium für positive Reihen . . . . .	518
§ 375. Das Integralkriterium für die Konvergenz . . . . .	519
§ 376. Alternierende Reihen. Das Kriterium von Leibnitz . . . . .	521
§ 377. Absolute und bedingte Konvergenz . . . . .	522
§ 378. Das D'ALEMBERTSche Kriterium für beliebige Reihen . . . . .	524
§ 379. Umordnen der Glieder einer unendlichen Reihe . . . . .	524
§ 380. Zusammenfassen der Glieder einer unendlichen Reihe . . . . .	525
§ 381. Multiplikation von unendlichen Reihen . . . . .	526
§ 382. Die Division von unendlichen Reihen . . . . .	528
§ 383. Reihen mit veränderlichen Gliedern . . . . .	530
§ 384. Der Konvergenzbereich einer Reihe mit veränderlichen Gliedern . . . . .	530
§ 385. Über gleichmäßige und ungleichmäßige Konvergenz . . . . .	533
§ 386. Definition der gleichmäßigen und ungleichmäßigen Kon- vergenz . . . . .	536
§ 387. Geometrische Deutung der gleichmäßigen und ungleich- mäßigen Konvergenz . . . . .	536

§ 388.	Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz; reguläre Reihen . . . . .	537
§ 389.	Die Stetigkeit der Summe einer unendlichen Reihe . . . . .	538
§ 390.	Die Integration von unendlichen Reihen . . . . .	539
§ 391.	Die Differentiation von unendlichen Reihen . . . . .	542
§ 392.	Potenzreihen . . . . .	543
§ 393.	Konvergenzintervall und Konvergenzradius einer Potenzreihe . . . . .	544
§ 394.	Die Bestimmung des Konvergenzradius . . . . .	545
§ 395.	Der Konvergenzbereich einer Potenzreihe in $x-x_0$ . . . . .	547
§ 396.	Das Theorem von ABEL . . . . .	548
§ 397.	Operationen mit Potenzreihen . . . . .	548
§ 398.	Differentiation und Integration von Potenzreihen . . . . .	550
§ 399.	Die TAYLOR-Reihe . . . . .	552
§ 400.	Die Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe . . . . .	553
§ 401.	Die Entwicklung der elementaren Funktionen in Potenzreihen . . . . .	554
§ 402.	Die Anwendung der unendlichen Reihen auf die Berechnung von Integralen . . . . .	559
§ 403.	Hyperbolische Funktionen . . . . .	560
§ 404.	Die Umkehrfunktionen für die hyperbolischen Funktionen . . . . .	563
§ 405.	Die Herkunft der Namen für die hyperbolischen Funktionen . . . . .	566
§ 406.	Über komplexe Zahlen . . . . .	567
§ 407.	Komplexe Funktionen von reellen Argumenten . . . . .	568
§ 408.	Die Ableitung einer komplexen Funktion . . . . .	570
§ 409.	Komplexer Exponent einer positiven Zahl . . . . .	571
§ 410.	Die EULERSche Formel . . . . .	572
§ 411.	Trigonometrische Reihen . . . . .	573
§ 412.	Historische Bemerkungen über die trigonometrischen Reihen . . . . .	573
§ 413.	Die Orthogonalität des Systems der Funktionen $\cos nx$ und $\sin nx$ . . . . .	574
§ 414.	Die Formeln von EULER-FOURIER . . . . .	576
§ 415.	FOURIER-Reihen . . . . .	578
§ 416.	Die FOURIER-Reihe einer stetigen Funktion . . . . .	579
§ 417.	Die FOURIER-Reihen für gerade und ungerade Funktionen . . . . .	582
§ 418.	FOURIER-Reihen für unstetige Funktionen . . . . .	586

Differential- und Integralrechnung für Funktionen mehrerer Variabler . . . . . 590

§ 419.	Funktionen von zwei Variablen. . . . .	590
§ 420.	Funktionen von drei und mehr Variablen . . . . .	591
§ 421.	Verfahren zur Angabe von Funktionen mehrerer Variabler . . . . .	592
§ 422.	Grenzwerte von Funktionen mehrerer Variabler . . . . .	594
§ 423.	Über die Größenordnung von Funktionen mehrerer Variabler . . . . .	595
§ 424.	Stetigkeit von Funktionen mehrerer Variabler . . . . .	597
§ 425.	Partielle Ableitungen . . . . .	597

§ 426. Geometrische Bedeutung der partiellen Ableitungen für den Fall von zwei Argumenten . . . . .	598
§ 427. Totaler Zuwachs und partieller Zuwachs . . . . .	599
§ 428. Das partielle Differential . . . . .	600
§ 429. Darstellung der partiellen Ableitung durch das Differential . . . . .	601
§ 430. Das totale Differential . . . . .	601
§ 431. Die geometrische Bedeutung des totalen Differentials . . . . .	603
§ 432. Die Invarianz des Ausdrucks $f_x dx + f_y dy + f_z dz$ für das totale Differential . . . . .	603
§ 433. Die Technik des Differenzierens . . . . .	604
§ 434. Differenzierbare Funktionen . . . . .	605
§ 435. Die Tangentialebene und die Flächennormale . . . . .	606
§ 436. Die Gleichung der Tangentialebene. . . . .	607
§ 437. Die Gleichung der Normalen . . . . .	608
§ 438. Differentiation zusammengesetzter Funktionen . . . . .	609
§ 439. Übergang von rechtwinkligen Koordinaten zu Polarkoordinaten . . . . .	610
§ 440. Formeln für die partiellen Ableitungen einer zusammengesetzten Funktion . . . . .	611
§ 441. Die totale Ableitung . . . . .	611
§ 442. Differentiation impliziter Funktionen von mehreren Argumenten . . . . .	612
§ 443. Partielle Ableitungen höherer Ordnung . . . . .	614
§ 444. Die totalen Differentiale höherer Ordnung . . . . .	616
§ 445. Die Technik des mehrmaligen Differenzierens . . . . .	617
§ 446. Vereinbarung über die Bezeichnungsweise von Differentialen . . . . .	618
§ 447. Die TAYLORSche Formel für Funktionen von mehreren Variablen . . . . .	619
§ 448. Extremwerte (Maxima und Minima) von Funktionen mehrerer Argumente . . . . .	621
§ 449. Regel für die Bestimmung von Extremwerten . . . . .	622
§ 450. Hinreichende Bedingung für ein Extremum (für den Fall von zwei Variablen) . . . . .	623
§ 451. Das Doppelintegral . . . . .	624
§ 452. Die geometrische Bedeutung des Doppelintegrals . . . . .	626
§ 453. Eigenschaften des Doppelintegrals . . . . .	626
§ 454. Abschätzung des Doppelintegrals . . . . .	627
§ 455. Berechnung des Doppelintegrals (einfache Fälle) . . . . .	627
§ 456. Berechnung des Doppelintegrals (allgemeiner Fall) . . . . .	631
§ 457. Punktfunktionen . . . . .	634
§ 458. Das Doppelintegral in Polarkoordinaten . . . . .	635
§ 459. Der Flächeninhalt eines Flächenstücks . . . . .	638
§ 460. Das dreifache Integral. . . . .	641
§ 461. Berechnung des dreifachen Integrals (einfache Fälle) . . . . .	641
§ 462. Die Berechnung eines dreifachen Integrals (allgemeiner Fall) . . . . .	642
§ 463. Zylinderkoordinaten . . . . .	644
§ 464. Das dreifache Integral in Zylinderkoordinaten . . . . .	645
§ 465. Kugelkoordinaten . . . . .	645
§ 466. Das dreifache Integral in Kugelkoordinaten . . . . .	646

§ 467.	Leitfaden für die Anwendung von Doppelintegralen und dreifachen Integralen . . . . .	648
§ 468.	Das Trägheitsmoment . . . . .	649
§ 469.	Einige physikalische und geometrische Größen, die sich durch Doppelintegrale ausdrücken lassen . . . . .	651
§ 470.	Einige physikalische und geometrische Größen, die sich durch dreifache Integrale ausdrücken lassen . . . . .	653
§ 471.	Das Kurvenintegral . . . . .	654
§ 472.	Die Bedeutung des Kurvenintegrals in der Mechanik . . . . .	655
§ 473.	Die Berechnung des Kurvenintegrals . . . . .	656
§ 474.	Die GREENSche Formel . . . . .	658
§ 475.	Bedingung für die Unabhängigkeit des Kurvenintegrals vom Weg . . . . .	658
§ 476.	Eine andere Form für die Bedingung aus dem letzten Paragraphen . . . . .	660
Differentialgleichungen . . . . .		663
§ 477.	Grundbegriffe . . . . .	663
§ 478.	Gleichungen erster Ordnung . . . . .	665
§ 479.	Die geometrische Bedeutung einer Gleichung erster Ordnung . . . . .	665
§ 480.	Isoklinen . . . . .	668
§ 481.	Partikuläre Lösung und allgemeine Lösung einer Gleichung erster Ordnung . . . . .	669
§ 482.	Gleichungen mit separierten Variablen . . . . .	670
§ 483.	Separation der Variablen. Singuläre Lösung . . . . .	671
§ 484.	Gleichungen mit totalen Differentialen . . . . .	673
§ 485.	Die homogene Gleichung . . . . .	674
§ 486.	Lineare Gleichung erster Ordnung . . . . .	677
§ 487.	Die CLAIRAUTSche Gleichung . . . . .	679
§ 488.	Die Enveloppe . . . . .	681
§ 489.	Die Integrierbarkeit von Differentialgleichungen . . . . .	682
§ 490.	Näherungsweise Integration einer Gleichung erster Ordnung nach der Methode von EULER . . . . .	682
§ 491.	Integration von Differentialgleichungen mit Hilfe von unendlichen Reihen . . . . .	684
§ 492.	Über das Aufstellen von Differentialgleichungen . . . . .	686
§ 493.	Gleichungen zweiter Ordnung . . . . .	690
§ 494.	Gleichungen $n$ -ter Ordnung . . . . .	692
§ 495.	Reduktion der Ordnung . . . . .	692
§ 496.	Die lineare Gleichung zweiter Ordnung . . . . .	694
§ 497.	Die lineare Gleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	696
§ 498.	Die homogene lineare Gleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	696
§ 499.	Die inhomogene lineare Gleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	700
§ 500.	Lineare Gleichung beliebiger Ordnung . . . . .	704
§ 501.	Die Methode der Variation der Konstanten . . . . .	705
§ 502.	Systeme von Differentialgleichungen. Lineare Systeme . . . . .	706

Einige bemerkenswerte Kurven . . . . .	708
§ 503. Die Strophoide . . . . .	708
§ 504. Die Kissoide des DIOKLES . . . . .	710
§ 505. Das Kartesische Blatt . . . . .	712
§ 506. Die Versiera der AGNESI . . . . .	714
§ 507. Die Konchoide des NIKOMEDES . . . . .	715
§ 508. Die PASCALSche Schnecke. Die Kardioide . . . . .	719
§ 509. CASSINISCHE Linien . . . . .	723
§ 510. Die BERNOULLISCHE Lemniskate . . . . .	725
§ 511. Die ARCHIMEDISCHE Spirale . . . . .	726
§ 512. Die Kreisevolvente . . . . .	729
§ 513. Die logarithmische Spirale . . . . .	731
§ 514. Die Zykloide . . . . .	734
§ 515. Die Epizykloide und die Hypozykloide . . . . .	739
§ 516. Die Traktrix . . . . .	749
§ 517. Die Kettenlinie . . . . .	753
Tabellen . . . . .	757
Sachverzeichnis . . . . .	776