

Inhaltsverzeichnis

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Geleitwort | 11 |
| Vorwort | 13 |
| | |
| Teil IV: Algebra. | 17 |
| | |
| 11 Zahlen und Zahlensysteme | 18 |
| 11.1 Vorläufer unserer Zahlen | 18 |
| 11.2 Das Fünfersystem im Unterricht. | 22 |
| 11.3 Darstellung großer Zahlen. | 27 |
| 11.4 Eine technische Veranschaulichung von Zahlensystemen bzw. exponentiellem Wachstum: Übersetzung von Zahnrädern | 29 |
| 11.5 Addition und Übertrag | 31 |
| 11.6 Multiplikation und das kleine Einmaleins im Fünfersystem | 33 |
| 11.7 Wunderkerzen und exponentielles Wachstum | 34 |
| 11.8 Einführung von Wurzeln – Intervallschachtelung | 36 |
| 11.9 Strukturverlust durch Zahlenbereichserweiterung | 39 |
| | |
| 12 Rechnen | 43 |
| 12.1 Rechteck- und Quadratzahlen im kleinen Einmaleins | 44 |
| 12.2 Die schwierigste Aufgabe des kleinen Einmaleins. | 47 |
| 12.3 Rechenwege abschreiten – das große Einmaleins erkunden | 50 |
| 12.4 Strukturelles Lernen des großen Einmaleins | 57 |
| 12.5 Noch mehr Rechenwege: diagonale Wege im Einmaleins und binomische Formeln | 58 |
| 12.6 das dritte Binom haptisch erfahren | 60 |
| 12.7 Ausklammern und ausmultiplizieren: das Distributivgesetz | 62 |
| 12.8 $(a + b)^2$, $(a + b)^3$ und weitere geometrische Interpretationen | 63 |
| 12.9 Gehirngerechtes Lernen, Gestaltpsychologie | 65 |
| 12.10 $5 - (-2)$ oder die Addition und Subtraktion ganzer Zahlen | 67 |
| 12.11 Üben im Rundgang | 68 |
| 12.12 Abfragen mit Hüpfen | 70 |
| 12.13 Minus mal Minus ergibt Plus | 71 |

| | | |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 13 | Brüche und ihre Addition | 78 |
| 13.1 | Erste Erfahrungen mit Anteilen | 80 |
| 13.2 | Der Bruch als Anteil: ein lebendiges Domino | 84 |
| 13.3 | Halbieren bis ins Aschgraue | 88 |
| 13.4 | Erweitern und Kürzen | 91 |
| 13.5 | Erweitern und Kürzen als Gruppenübung. | 95 |
| 13.6 | Vollständig gekürzter Bruch und Primzahlen | 98 |
| 13.7 | Das Sieb des Eratosthenes | 99 |
| 13.8 | Telefonnummern und Primzahlen | 101 |
| 13.9 | Teilbarkeitsregeln: ein Beweis für die Teilbarkeit durch 3 (bzw. 9) | 102 |
| 13.10 | Pascalsches Dreieck – Malen nach Zahlen. | 106 |
| 13.11 | Mathematik ist Mustererkennung – Zahlenfolgen im Pascalschen Dreieck. | 110 |
| 13.12 | Brüche als Prozentzahlen | 114 |
| 13.13 | Blinder Wissenschaftler erklärt Ahnungslosem: der Sprung ins Analytische | 116 |
| 13.14 | Was ergibt $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$? Addition und Subtraktion von Brüchen. | 117 |
| 13.15 | Addition von Brüchen im gehirngerechten Tafelaufschrieb. | 119 |
| 13.16 | Gemischte Schreibweise bei Brüchen | 120 |
| 13.17 | Formalismus als Geschenk. | 121 |
| 13.18 | Eigene Übungsaufgaben: ein Domino. | 122 |
| 13.19 | Eigene Übungsaufgaben in Kleingruppen. | 124 |
| 13.20 | Die Sache mit der Null. | 125 |
| 13.21 | Unendlich ist keine Zahl | 132 |
| 13.22 | Gibt es mehr Brüche als natürliche Zahlen? Das Hilbertsche Hotel und der Umgang mit dem Unendlichen | 133 |
| 14 | Multiplizieren von Brüchen | 137 |
| 14.1 | Anteile von Anteilen oder der gefundene Schatz | 137 |
| 14.2 | Trinken von Brüchen | 141 |
| 14.3 | Multiplikation von Brüchen: „Von“ wird zu „mal“ | 144 |
| 14.4 | Aufschrieb der Regel „Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner“ | 148 |
| 14.6 | Über Zahlen und ihre Rollen – kleiner Exkurs für den theatralen Mathematiker | 152 |
| 14.7 | Brüche im Dezimalsystem: Dezimalbrüche | 152 |
| 14.8 | Kommazahlen verstehen: andere Zahlensysteme | 155 |

| | | |
|----------------|---------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 14.9 | Division durch Brüche | 159 |
| 14.10 | Können Operatoren vertauscht werden? | 167 |
| 14.11 | „Punkt vor Strich“ und Klammerrechnung | 169 |
| 14.12 | Brüche am Fahrrad – der Bruch als Verhältnis | 170 |
| 14.13 | Algebra der Übersetzungen – Bruchrechnen mit Getrieben | 174 |
| 14.14 | Neidfreies Teilen unter zwei Personen. | 180 |
| 14.15 | Neidfreies Teilen unter drei Personen | 183 |
| 15 | Potenzen. | 189 |
| 15.1 | Plädoyer für vernetztes Lernen | 189 |
| 15.2 | Der Weltraum, unendliche Weiten | 195 |
| 15.3 | Umgang mit großen Zahlen – Modell unseres Sonnensystems | 197 |
| 15.4 | Einführung in das Rechnen mit Potenzen | 199 |
| 15.5 | Exponentielles Wachstum ist unabschätzbar | 200 |
| 15.6 | Potenzgesetze oder das Aufschließen von Gleichungen | 206 |
| 15.7 | Musik und Mathematik: Gitarre und exponentielles Wachstum | 211 |
| 15.8 | Warum gilt $2^0 = 1$? | 215 |
| Teil V: | Terme, Gleichungen und Vektorrechnung | 217 |
| 16 | Terme und Gleichungen. | 218 |
| 16.1 | Mathematik ist eine Sprache – Rechengesetze als Grammatik | 219 |
| 16.2 | Mathematik als Schachspiel | 220 |
| 16.3 | Terme: eine haptische Einführung | 222 |
| 16.4 | Die Leonardo-Brücke: Anzahl der Querstreben als Variable. | 228 |
| 16.5 | Gleichungen – eine Waage für Streichhölzer | 234 |
| 16.6 | Gleichungen konstruieren, Gleichungen lösen | 243 |
| 16.7 | Mit negativen Zahlen haptisch rechnen: Bedeutung der Ortskodierung | 246 |
| 16.8 | Haptische Interpretationen in der Algebra | 254 |
| 16.9 | Aus-x-en und Rechnen mit Klammern | 256 |
| 16.10 | Schritt für Schritt – Lösungen abschreiten | 259 |
| 16.11 | Rubik's Cube und Algorithmen | 262 |

| | | |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------|-----|
| 17 | Lineare Gleichungssysteme und Vektoren | 271 |
| 17.1 | Einführung: Algebraische und grafische Welten | 271 |
| 17.2 | Die Lösungsmenge einer Gleichung mit zwei Variablen | 275 |
| 17.3 | Gleichungen mit drei Variablen – eine Ebene entsteht | 278 |
| 17.4 | Ein erstes LGS, Gleichsetzungs- und Einsetzungsverfahren | 281 |
| 17.5 | Das Gaußverfahren: Informationen wandern von Planet zu Planet | 289 |
| 17.6 | Gaußverfahren zum Anfassen | 290 |
| 17.7 | Addition von Vektoren | 294 |
| 17.8 | Einführung der Addition von Vektoren – Projektion einer Verknüpfung | 296 |
| 17.9 | Die Raumecke als Koordinatensystem | 298 |
| 17.10 | Weitere Koordinatensysteme | 300 |
| 17.11 | Lineare Unabhängigkeit oder ein geschlossener Rundwanderweg | 302 |
| 18 | Ebenen und Geraden | 304 |
| 18.1 | Gleichungen entsprechen Ebenen, Ebenen Gleichungen | 304 |
| 18.2 | Parameterform oder die Konstruktion einer Geraden | 306 |
| 18.3 | Eine Gerade aus Köpfen | 310 |
| 18.4 | Unendlich viele Geraden oder die Ebene in Parameterform | 311 |
| 18.5 | Stifte und Geodreiecke als Geraden und Ebenen | 313 |
| 18.6 | Normalengleichung einer Ebene | 317 |
| 18.7 | Von einer Koordinatengleichung über eine Parameterform zur Normalenform | 319 |
| | Literatur | 329 |
| | Sachverzeichnis | 331 |