

Auf einen Blick

Über den Autor	9
Einleitung.....	25
Teil I: Natürliche Zahlen und Mengen – im Auge des Informatikers.....	31
Kapitel 1: Zahlen und ihre Logik.....	33
Kapitel 2: Im Assembler-Code der Mathematik – Handreichungen für Ungläubige..	57
Kapitel 3: Mengenlehre – im Maschinenraum der Mathematik.....	69
Teil II: Diskrete Strukturen.....	99
Kapitel 4: Spezielle Beziehungen – Äquivalenzen und Ordnungen	101
Kapitel 5: Allgemeine Beziehungen und Beziehungskisten.....	117
Kapitel 6: Gruppen – es kann nicht nur eine geben.....	131
Kapitel 7: Ringe und Körper.....	147
Kapitel 8: Graphentheorie.....	159
Teil III: Analysis für Informatiker.....	183
Kapitel 9: Reelle Zahlen – der virtuelle Sprung in die Unendlichkeit	185
Kapitel 10: Pflegeleichte Funktionen – Stetigkeit und Differenzierbarkeit.....	229
Kapitel 11: Integrale	271
Teil IV: Vom Würfelspiel zum Algorithmus.....	283
Kapitel 12: Wahrscheinlichkeitsrechnung – Regeln im Regellosen.....	285
Kapitel 13: Die klassischen Verteilungen.....	317
Kapitel 14: Testen! – Denn Vertrauen ist nicht immer gut.....	341
Kapitel 15: Probabilistische Algorithmen – theoretisch interessant aus praktischen Gründen.....	361
Teil V: Sprung in den Hyperraum.....	375
Kapitel 16: Vektoren – aggregierte Zahlen.....	377
Kapitel 17: Transformationen	419
Kapitel 18: Lineare Gleichungssysteme – Number Crunching in der linearen Algebra.....	439
Teil VI: Höhere Weihen in der Analysis.....	453
Kapitel 19: Skalierung der Differenzierbarkeit	455
Kapitel 20: Potenziale als Stammfunktionen	473
Kapitel 21: Steilkurs in komplexer Funktionentheorie.....	485
Kapitel 22: Hilberträume.....	503

12 Auf einen Blick

Teil VII: Anhang	547
Anhang A: Methoden einer funktionellen Mengentheorie.....	549
Anhang B: Binomialverteilung versus Poissonverteilung.....	565
Anhang C: Programmierung komplexer Zahlen als abstrakte Datentypen.....	567
Anhang D: Berechnung von Determinanten.....	575
Anhang E: Matrizenkalküle.....	581
Anhang F: Benutzte Symbole.....	585
Stichwortverzeichnis	589

Inhaltsverzeichnis

Über den Autor	9
Danksagungen	9
Einleitung.....	25
Über dieses Buch.....	25
Wer hatten wir bei diesem Buch besonders vor Augen.....	25
Durch welche Brille sehen wir also den Informatiker?	26
Und was bedeutet dies für uns?.....	26
Haben wir auch Nichtinformatiker als potenzielle Leser im Blick.....	27
Wie kann man dieses Buch lesen?.....	27
Welche Besonderheiten finden sich in unserem Buch.....	27
Auf welche weiteren (kleinen) Innovationen dürfen wir hinweisen?	28
Wann ist genug genug?.....	29
Und weitere Literatur ?	29
Kommunikation mit Autoren.....	30
TEIL I	
NATÜRLICHE ZAHLEN UND MENGEN – IM AUGE DES	
INFORMATIKERS.....	31
Kapitel 1	
Zahlen und ihre Logik	33
Was es über die Vielfalt der Zahlen zu sagen gibt.....	33
Zahlen zählen	34
Zahlen aufs Papier – und später auf den Rechner.....	35
Es darf auch etwas mehr sein – über die natürlichen Zahlen hinaus.....	36
Ganzzahlige Brüche – ein zweiter Nachschlag.....	37
Die Welt der rationalen Zahlen ist für Informatiker genug – Mathematiker sind weniger bescheiden	39
Komplexe Zahlen erweitern den Zahlenraum ein weiteres Mal.....	41
Blick auf die Gipfel: Hyperkomplexe Zahlen und Oktionen.....	44
Wir wissen nun, über was wir reden, wir wollen jetzt wissen, wie wir darüber reden	45
Prädikat – besonders wertvoll	45
(Mathematische) Wahrheit.....	46
Operatoren – Aus Zahlen werden Zahlen.....	47
Logische Operatoren – Schnittstellen zur Logik.....	48
Verrechnung von Wahrheitswerten	48
Junktoren.....	48
Wahrheitstabellen.....	49
Für den einen ist es duplo, für den anderen die längste Praline der Welt – zur Doppelrolle der Zahlen in der formalen Logik.....	49

14 Inhaltsverzeichnis

Quantoren in der Logik – Prädikate erhalten durch sie ihre Power	52
Der Existenzquantor \exists	53
Umsetzung des Existenzquantors in eine Schleife für Programmierer	53
Allquantor \forall	54

Kapitel 2

Im Assembler-Code der Mathematik – Handreichungen für Ungläubige

57	
Gehen wir zurück auf Los	57
Was passiert eigentlich beim Rechnen?	58
Wir bringen dem Computer das Rechnen bei	58
Wie sehen die nächsten Schritte aus?	59
Rekursion – Vorbereitungen für die Induktion	60
Induktion – mit Warp 10 durch alle Zahlen	62
Anwendungen der Induktion – Return on invest	63
Beweis des Assoziativgesetzes	64
Wir kennen die Zahlen vom Zählen her – können wir sie auch abstrakt charakterisieren?	65
Unendlich viele Zahlen auf einem endlichen Rechner?	66

Kapitel 3

Mengenlehre – im Maschinenraum der Mathematik

69	
Mengenlehre – fängt man damit nicht immer an?	70
Die Sprache der Mengenlehre – Goethe wäre »not«	70
Erste Anforderungen an den Mengenbegriff	71
Mengentheoretische Operationen	72
Äquivalenz von Aussagen – Gleichheit von Mengen	74
Eigenschaften der Operationen \cup , \cap und \setminus	74
Fallstricke und Sicherungen	76
Weitere mengentheoretische Operationen	77
Mengen als logische Bausteine für die Implementierung von Zahlen	80
Spezielle Realisierungen des Zählprozesses	80
Mengen – was kann man sich darunter vorstellen	83
Linux-Filesystem als Modell für ein Mengensystem	83
Infinite in all directions	85
Mengen für Datenbanker	86
Abstraktionen	87
Datenbanken? – Keep it simple and stupid	88
Nur für Theoretiker: Suchen, bis die Sterne verglühen	88
Wer hat Angst vor Graphen?	90
Urlemente – ein bisschen Medienbruch	92
Mengenlehre für »Informatiker mit der harten Kinnlade«	93
Prädikatenlogik mit einem einzigen Prädikat	93
Skolemisierung – oder wie destilliert man Operationen aus Aussagen	96

TEIL II
DISKRETE STRUKTUREN..... 99

Kapitel 4
Spezielle Beziehungen – Äquivalenzen und Ordnungen..... 101

Äquivalenzrelationen – das Gleiche versus dasselbe	102
Äquivalenzrelation – die Erste	103
Äquivalenzrelation – die Zweite	108
Ordnungsrelationen – Ordnung in der mathematischen Welt.....	109
Geordnete Zahlen – die kleiner/gleich Beziehung	109
Verträglichkeiten	110
Teilbarkeit – auch eine Ordnung	111
Auch die Teilbarkeit ist relativ verträglich und pflegeleicht	111
Die mengentheoretische Inklusion – eine Ordnung für sich	112
Die Ordnungsbeziehungen – was haben sie gemein, was unterscheidet sie	112
Ordnungsbeziehungen und Grenzen.....	113
Graphen als Medium für die Darstellung partieller Ordnungen	114

Kapitel 5
Allgemeine Beziehungen und Beziehungskisten..... 117

Beziehungen als Tabellen.....	118
Inoffizielle Beziehungen.....	119
Realisierungen inoffizieller Beziehungen	120
Operieren mit Beziehungen	122
Jemanden kennen, der jemanden kennt, der Beziehungen hat.....	123
Spezialfälle: Verknüpfungen mit der inversen Beziehung.....	124
Verknüpfungen unterschiedlicher Relationen.....	125
Ausblick auf Relationen zwischen unterschiedlichen Mengen.....	126
Eindeutige Beziehungen – auf dem Weg zu Funktionen	127
Väter und Väter von Vätern.....	128
Funktionen und ihre allgemeinen Eigenschaften	129

Kapitel 6
Gruppen – es kann nicht nur eine geben..... 131

Über die Addition ganzer Zahlen	131
Beweis der Eindeutigkeit des neutralen Elements	132
Von den ganzen Zahlen zum allgemeinen Gruppenbegriff.....	132
Abstrakte kommutative Gruppen G	133
Nichtkommutative Gruppen.....	133
Beispiele von in der Natur auftretenden Gruppen – Symmetriegruppen...	134
Gruppen und Faktorgruppen	139
Faktorgruppen der ganzen Zahlen	139
Allgemeine Gruppen und Faktorgruppen.....	141
Der Index einer Untergruppe $H \subset G$	142
Untergruppen endlicher Gruppen.....	143

Kapitel 7

Ringe und Körper **147**

- Überblick Ringe 148
- Überblick Körper 149
- Ein Rückblick auf die Teilbarkeit und die Primzahlen 149
- \mathbb{Z}_n als Restklassenring 151
 - Wohldefiniertheit der Operationen auf den Restklassen 151
 - Der Euklidische Algorithmus 152
 - Einheiten in \mathbb{Z}_n 153
 - Eulersche φ -Funktion 153
- Return on Invest – das RSA Verfahren in der Kryptologie 154
 - Asymmetrische Verschlüsselungsverfahren 155
 - Das RSA-Verfahren in der Theorie 155
 - Praktische Bemerkungen zum RSA-Verfahren 157

Kapitel 8

Graphentheorie **159**

- Zur Motivation 159
- Das Haus vom Nikolaus 160
- Gerichtete und ungerichtete Graphen 160
- Zusammenhängende und unzusammenhängende Graphen 161
- Schlingen und parallele Kanten, Nullgraph und einfacher Graph 162
- Eckengrad 163
 - Algorithmische Eigenschaften des Eckengrads 164
- Handshake-Lemma 164
- Königsberger Brückenproblem 166
- Eulergraph und Eigenschaften 167
- Eulerkreis/Eulersche Touren 168
- Adjazenzmatrix 168
- Wann sind Graphen isomorph? – Adjazenzmatrizen 169
- Alternative Tabellendarstellung – Inzidenzmatrizen 170
- Bäume 171
 - Definition und Eigenschaften eines Baumes 171
 - Spannbaum 171
 - Definition von Wäldern 171
 - Wurzelbaum 172
 - Binärbäume 174
 - Suchbaum 175
- Traversieren von Wurzelbäumen 175
- Wie gehören Binärbäume und algebraische Ausdrücke zusammen? 176
- Kürzeste Wege finden 177
- Kruskal-Algorithmus 180
- Prim-Algorithmus 180
- Dijkstra-Algorithmus 181

TEIL III ANALYSIS FÜR INFORMATIKER..... 183

Kapitel 9

Reelle Zahlen – der virtuelle Sprung in die Unendlichkeit..... 185

Irrationale Zahlen	185
$\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl.....	186
Reelle Zahlen	187
Die Einführung der reellen Zahlen – für Informatiker eine kleine Revolution	188
Elementare Eigenschaften der reellen Zahlen.....	189
Abschätzungen, die Analysis lebt davon.....	191
Betragsfunktion und Dreiecksungleichung.....	191
Bernoullische Ungleichung.....	193
Der Umgebungsbegriff.....	194
Unendliche Folgen.....	194
Technische Definition der Konvergenz.....	196
Arbeiten mit der technischen Definition	196
Besondere Eigenschaften konvergenter Folgen	197
Hinreichende Konvergenzbedingungen beschränkter Folgen.....	198
Wichtige Spezialfälle: Die Folgen $(1 + 1/n)^n$ und $(1 + 1/n)^{n+1}$	200
Rekursiv definierte Folgen.....	201
Häufungspunkte von Folgen	205
Grenzwertsätze für Folgen – Handreichungen für Klausuren	206
Beweis des ersten Grenzwertsatzes	206
Beispielhafte Folgerungen aus den Grenzwertsätzen	207
Mehr Werkzeuge zur Bestimmung des Konvergenzverhaltens.....	209
Das Cauchysche Konvergenzkriterium.....	209
Grenzwerte unendlicher Reihen.....	210
Die harmonische Reihe.....	210
Begriffliche Einordnung der unendlichen Reihen	211
Cauchysche Konvergenzkriterium für unendliche Reihen	212
Einfache Beispiele unendlicher Reihen.....	212
Wurzel- und Quotientenkriterium – die wichtigsten	
Konvergenzkriterien für Reihen	213
Absolute Konvergenz.....	218
Die allgemeine binomische Formel.....	224
Die Fakultätsfunktion	224
Binomialkoeffizienten.....	225
Binomische Formel.....	226

Kapitel 10

Pflegeleichte Funktionen –

Stetigkeit und Differenzierbarkeit..... 229

Grundsätzliche Bemerkungen.....	230
»Durchhalteparolen« für die Analysis.....	231
Der Grenzwertbegriff bei Funktionen.....	232
Konvergenz mithilfe des Umgebungsbegriffs	233

18 Inhaltsverzeichnis

Konvergenz unter Rückgriff auf Folgenkonvergenz	233
Konvergenzsätze	235
Anwendung der Konvergenzsätze auf die Exponentialfunktion	236
Stetige Funktionen	239
Beispiel einer Funktion, die nur an einer Stelle stetig ist	240
Wichtige Eigenschaften stetiger Funktionen	240
Differenzierbare Funktionen	243
Die Landau-Symbole $o()$ und $O()$	243
Differenzierbarkeit via $o(x)$	244
Differenzierbarkeit via Differenzenquotient	245
Beide Definitionen der Differenzierbarkeit sind äquivalent	247
Rechenregeln für Ableitungen	249
Verträglichkeit der Differenzialquotienten mit der Summenbildung	249
Produktregel	249
Quotientenregel	250
Kettenregel	251
Wichtige Beispiele differenzierbarer Funktionen	252
Differenzierbarkeit der Polynome	252
Ableitung der e -Funktion und des Logarithmus	253
Ableitungen der trigonometrischen Funktionen	254
Der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung	257
Der Satz von Rolle	258
Folgerungen aus dem Mittelwertsatz	259
Die Regeln von l'Hospital	259
Wichtige Beispiele für die Anwendung der l'Hospitalschen Regeln	261
Taylorpolynome und Taylorentwicklung	263
Beispiele von Taylorentwicklungen	267
Analytische Funktionen als »ganzheitliche« Funktionen	270

Kapitel 11

Integrale	271
Stammfunktionen	271
Integrale elementarer Funktionen	272
Partielle Integration	273
Integration per Substitution	275
Rationale Funktionen und Partialbruchzerlegungen	276
Bestimmte Integrale	279
Einstieg in die Flächenberechnung	279
Stammfunktionen »in action«	281

TEIL IV

VOM WÜRFELSPIEL ZUM ALGORITHMUS

283

Kapitel 12

Wahrscheinlichkeitsrechnung – Regeln im Regellosen

285

Am Anfang war das Spiel – grundlegende Begrifflichkeiten der

Wahrscheinlichkeitsrechnung

286

Ereignisse und Elementarereignisse	286
Wahrscheinlichkeiten.....	290
Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten im formalen Rahmen	295
Bedingte Wahrscheinlichkeiten – corriger la fortune	297
Bedingte Wahrscheinlichkeiten reengineered – die Formel von Bayes.....	302
Zufallsvariable – geeignete Codierungen zufälliger Ereignisse	303
Zufallsvariable – Übertragung von Wahrscheinlichkeiten auf Zahlenmengen	304
Summen und Produkte von Zufallsvariablen.....	305
Von der Zufallsvariablen zur Verteilungsfunktion.....	306
Mittelwerte in verschiedenen Ausprägungen: Erwartungswerte und Varianzen.....	308
Der Erwartungswert der Streuung – die Varianz.....	311
Korrelationen – synchrone Streuungen	313

Kapitel 13

Die klassischen Verteilungen 317

Binomialverteilung	317
Münzwurf mit geänderten Spielregeln.....	318
Erwartungswerte und Varianzen für binomialverteilte Zufallsvariablen.....	319
Geometrische Verteilung.....	321
Geänderte Spielregeln	322
Poissonverteilte Zufallsvariablen.....	323
Näherungsverfahren für die Binomialverteilung – die Poissonverteilung ..	324
Erwartungswerte und Varianzen poissonverteilter Zufallsvariablen.....	326
Stetige Verteilungen.....	328
Exponentialverteilung.....	329
Normalverteilung.....	333

Kapitel 14

Testen! – Denn Vertrauen ist nicht immer gut 341

Die Ungleichung von Tschebyscheff.....	343
Normalverteilung und Tschebyscheffsche Ungleichung in der Gegenüberstellung.....	345
Tschebyscheffsche Ungleichung und die Gesetze der großen Zahlen	347
Beispielhafte Anwendung des Maximum-Likelihood-Prinzips	349
Über das Testen von Hypothesen	350
Signifikanztests.....	350
Alternativtests	353
χ^2 -Anpassung und χ^2 -Test.....	358

Kapitel 15

Probabilistische Algorithmen – theoretisch interessant aus praktischen Gründen..... 361

Sortierverfahren	362
Statistische Analyse des Quicksorts.....	362

20 Inhaltsverzeichnis

Monte Carlo und Las Vegas – die ganze Wahrheit und nichts als die Wahrheit ..	364
Quicksort durch die Brille von Las Vegas betrachtet.....	364
Las Vegas liberalisiert – nur noch »nichts als die Wahrheit«	364
Monte Carlo – »die ganze Wahrheit«	370

TEIL V

SPRUNG IN DEN HYPERRAUM..... 375

Kapitel 16

Vektoren – aggregierte Zahlen..... 377

Erste Operationen mit Vektoren: Addition und skalare Multiplikation.....	377
Kräfte können in unterschiedlichen Reihenfolgen addiert werden.....	378
Die Addition von drei oder mehr Vektoren kann unterschiedlich geklammert werden	378
Zu jedem Vektor gibt es einen inversen Vektor	379
Vektoren können mit Zahlen multipliziert werden.....	380
Auch Geschwindigkeiten sind Vektoren	380
Das Skalarprodukt – hiermit erhält die Vektorrechnung ihre eigentliche Power	382
Das Skalarprodukt als Mittel zur Berechnung physikalischer Arbeit.....	382
Das Skalarprodukt erfasst geometrisch wichtige Sachverhalte – Orthogonalität, Länge und Abstand	383
Die Algebraisierung der Geometrie.....	383
Algebraisierung der Geometrie.....	384
Die Algebraisierung der Geometrie zum Zweiten	387
Die Seitenhalbierenden – revisited.....	387
Vektoren in Koordinatensystemen	389
Auch umgekehrt wird ein Schuh draus: Vektoren erzeugen ein Koordinatensystem	393
Abstrakte Vektoren: Vektorräume.....	397
Einstieg in die Klasse Vector	397
Spezifikation von Vektorräumen	399
Strategische Begriffe	401
Auch der abstrakte Vektorraum kann als Aggregat von Zahlen aufgefasst werden.....	406
Aber wie decodieren wir ein \vec{v} eines abstrakten Vektorraumes V praktisch?.....	408
Erweiterung der Vektorraumspezifikation durch abstrakte Skalarprodukte	411
Die zweite Chance des Mathematikers	417
Die Natur spielt mit.....	418

Kapitel 17

Transformationen..... 419

Duale Basen.....	420
Kovariante und kontravariante Komponenten.....	422
Die Beziehungen zwischen kovarianten und kontravarianten Komponenten	422

Der Übergang zwischen ko- und kontravarianten Koordinaten bei orthonormierten Basen	423
Nicht orthonormale Basen – könnten wir auf sie verzichten?.....	424
Asymmetrische Verschlüsselungsverfahren mit Hilfe dualer Basen	426
Lineare Abbildungen	427
Drehungen	427
Matrizen – operationelle Codierung linearer Abbildungen	428
Basistransformationen	434
Matrizen der Basistransformation	434
Besondere Eigenschaften der Matrizen der Basistransformationen	434
Die Matrizen der Basistransformationen als Matrizen einer Abbildung	435
Basistransformationen orthonormierter Basen	437

Kapitel 18

Lineare Gleichungssysteme –

Number Crunching in der linearen Algebra 439

Gleichungssysteme und zugehörige Matrizen	440
Bedingungen der Lösbarkeit von Gleichungssystemen	441
Der Gaußsche Algorithmus	442
Homogene und inhomogene Gleichungssysteme	445
Determinanten in Aktion	446
Eigenwerte und Eigenvektoren	448
Auffinden der Eigenwerte	449
Berechnung der Eigenvektoren	449
Eigenvektoren und Diagonalisierung von Matrizen	450
Besonderheiten symmetrischer Matrizen	451

TEIL VI

HÖHERE WEIHEN IN DER ANALYSIS 453

Kapitel 19

Skalierung der Differenzierbarkeit 455

Behandlung von Funktionen zweier Variablen	455
Differenzierbarkeit von Funktionen zweier Variablen	456
Nichtdifferenzierbare Funktionen trotz Existenz partieller Ableitung	458
Hinreichende Bedingungen für die Differenzierbarkeit	461
Behandlung von Funktionen beliebig vieler Variablen	462
Vektorwertige Funktionen	463
Differenzierbarkeit vektorwertiger Funktionen	463
Rechenregeln für Gradienten und Funktionalmatrizen	464
Hesse-Matrix und Taylorentwicklungen	466
∇ als Vektoroperator	466
Kritische Punkte und Extremwerte	468
Analyse der Hesse-Matrix	469
Beispielrechnung zur Analyse kritischer Punkte	470

22 Inhaltsverzeichnis

Kapitel 20

Potenziale als Stammfunktionen	473
Generelle Bemerkungen zum Begriff Stammfunktion	473
Ansätze zur Definition des Integrals $\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} F(\vec{s}) d\vec{s}$	474
Notiz zu $F(\vec{s}_i) \cdot (\Delta\vec{s})_i = F(\alpha(t_i)) \cdot \alpha'(t_i)(\Delta t)_i$	475
Vektorfelder	475
Notwendige Integrationsbedingungen für Vektorfelder	476
Kurvenintegrale über Vektorfelder	477
Hinreichende Integrationsbedingungen für Vektorfelder	480
Existenz eines globalen Potenzials trotz Existenz einer Singularität	481
Beispielhafte Berechnung einer Potenzialfunktion	482

Kapitel 21

Steilkurs in komplexer Funktionentheorie	485
Das formale Rechnen mit komplexen Zahlen	485
Addition komplexer Zahlen	486
Multiplikation komplexer Zahlen	486
Inverse komplexer Zahlen	486
Komplexe Zahlen als abstrakter Datentyp	487
Äquivalente Modelle komplexer Zahlen	487
Alternative Modelle	488
Auch Äquivalenzklassen von Polynomen verhalten sich wie komplexe Zahlen	490
Komplexe Differenzierbarkeit	492
Quick-and-dirty-Überlegungen	492
Ein zweiter Blick auf die Differenzierbarkeit komplexwertiger Funktionen	493
Komplexe Kurvenintegrale	494
Kurvenintegrale und komplexe Differenzierbarkeit	495
Auf dem Weg zur Cauchyschen Integralformel	496
Beweis der Cauchyschen Integralformel	496
Analytizität komplex differenzierbarer Formeln	498
Drei wichtige Folgerungen	500

Kapitel 22

Hilberträume	503
Komplexe Vektorräume	504
Komplexe Skalarprodukte	505
Beispiele komplexer Vektorräume	507
Hilbertbasen für Tupel	510
Hilbertbasen für Treppenfunktionen	511
Reduktionen der Treppenbreite	512
Treppenfunktionen der Treppenbreite $\frac{1}{2}$	512
Ein neuer Ansatz – eine letzte Chance	515
Neue Basen, neue Normierungen	519
Die δ -Funktion – ein »Außenskelett« für Hilberträume	522

Management summary des Wegs hin zur δ -Funktion.....	524
Der Hilbertraum der periodischen Funktionen.....	526
Funktionen mit Periode 2π	526
Die e -Funktionen als universelle Bausteine	526
Fourieranalyse und Fourierkoeffizienten.....	527
Basistransformationen	528
Fouriertransformationen nicht periodischer Funktionen.....	529
Basisfunktionen für $2\pi l$ -periodische Funktionen.....	530
Analyse des Übergangs $l \rightarrow \infty$	530
Die Fouriertransformationen als Basistransformationen	532
Hilberträume in der Physik.....	533
Vektoren in der klassischen Physik.....	533
Vektoren in der Mikrophysik.....	534
Abstrakte Vektoren im Hilbertraum.....	534
Orte und Impulse.....	535
Die Heisenbergsche Unschärferelation.....	536
Hilberträume im Quantencomputing –elementare Konzepte	539
Bits und Qubits.....	539
Bloch-Sphäre.....	540
Operationen auf der Bloch-Sphäre.....	541
2-Qubits.....	542
EPR-Paare und Quantenteleportation.....	544
TEIL VII	
ANHANG	547
Anhang A: Methoden einer funktionellen Mengentheorie.....	549
Zielkonflikte	549
Java-Z-Funktionen.....	550
Anhang B: Binomialverteilung versus Poissonverteilung.....	565
Anhang C: Programmierung komplexer Zahlen als abstrakte Datentypen.....	567
Anhang D: Berechnung von Determinanten.....	575
Anhang E: Matrizenkalküle.....	581
Matrixmultiplikation	581
Anhang F: Benutzte Symbole.....	585
Stichwortverzeichnis	589