

# Auf einen Blick

<b>TEIL I</b>	
<b>Grundlagen</b> .....	23
<b>TEIL II</b>	
<b>Analysis</b> .....	205
<b>TEIL III</b>	
<b>Lineare Algebra</b> .....	403

# Inhalt

Einleitung .....	21
------------------	----

## TEIL I Grundlagen

### **1 Mengenweise Mengen ..... 24**

<b>1.1 Testen Sie sich selbst .....</b>	<b>25</b>
<b>1.2 Mengen und Elemente .....</b>	<b>25</b>
Vereinigungs- und Schnittmengen .....	27
Unter- und Obermengen .....	27
Vordefinierte Mengen .....	28
<b>1.3 Spannungsübungen .....</b>	<b>30</b>
<b>1.4 Lösungen .....</b>	<b>30</b>

### **2 Gesetze der Algebra ..... 32**

<b>2.1 Testen Sie sich selbst .....</b>	<b>33</b>
<b>2.2 Gesetze, die jeder kennt .....</b>	<b>34</b>
Vertauschen (fast) nach Belieben .....	34
Das Verteilungsgesetz .....	35
Zig Prozent auf alles! .....	37
Zinsen bitte! .....	38
Die Minusklammer .....	38
Binomische Formeln .....	39
<b>2.3 Brüche, gemischt und dezimal .....</b>	<b>40</b>
Gemeine Brüche .....	40
Kürzen und erweitern .....	41
Rechnen mit Brüchen .....	42
Gemischte Brüche .....	44
Dezimalkommazahlen .....	45

<b>2.4</b>	<b>Potenzen und Wurzeln</b> .....	47
	Die Potenzgesetze .....	47
	Umkehren von Potenzen .....	49
	Wurzeln und gebrochene Exponenten .....	49
<b>2.5</b>	<b>Entspannungsübungen</b> .....	51
<b>2.6</b>	<b>Lösungen</b> .....	52

## **3 (Un-)gleichungen** ..... 54

<b>3.1</b>	<b>Testen Sie sich selbst</b> .....	55
<b>3.2</b>	<b>Einfache Gleichungen und Ungleichungen</b> .....	56
	Gleichungen umformen .....	56
	Ungleichungen lösen .....	58
<b>3.3</b>	<b>Quadratische Gleichungen und Bruchgleichungen</b> .....	59
	Die Wurzel ziehen .....	60
	Quadratische Ergänzung .....	60
	Bruchgleichungen .....	62
<b>3.4</b>	<b>Gleichungssysteme</b> .....	63
	Lineare Gleichungssysteme .....	63
	Das Gleichsetzungsverfahren .....	64
	Das Additions- bzw. Subtraktionsverfahren .....	65
	Das Einsetzungsverfahren .....	66
<b>3.5</b>	<b>Sachaufgaben</b> .....	67
	Lösung mit System .....	67
<b>3.6</b>	<b>Gleichungen lösen mit dem PC</b> .....	69
	Bühne frei für Sage .....	70
	Gleichungen lösen mit Sage .....	70
<b>3.7</b>	<b>Entspannungsübungen</b> .....	73
<b>3.8</b>	<b>Lösungen</b> .....	74

## 4 Funktionen im kartesischen Koordinatensystem ..... 82

4.1	Testen Sie sich selbst .....	83
4.2	Das Achsenkreuz .....	83
4.3	Lineare Funktionen .....	85
	Graphen zeichnen .....	85
	Plotten mit Sage .....	86
4.4	Parabeln .....	88
	Die Normalparabel .....	88
	Noch mehr Parabeln .....	90
	Rechenspiele mit Parabeln .....	91
4.5	Wurzel- und andere Funktionen .....	93
	Halbe Exponenten .....	93
	Die (Halb-)Kreisfunktion .....	95
4.6	Entspannungsübungen .....	97
4.7	Lösungen .....	98

## 5 e und log ..... 104

5.1	Testen Sie sich selbst! .....	105
5.2	Mehr, mehr, mehr! .....	105
	Eulers Zahl .....	106
	Weniger, aber niemals nichts .....	110
5.3	Logarithmen und ihre Regeln .....	111
	Logarithmen zu verschiedenen Basen .....	111
5.4	Entspannungsübungen .....	115
5.5	Lösungen .....	116

## 6 Sinus und Cosinus ..... 120

6.1	Testen Sie sich selbst .....	121
6.2	Rechtwinklige Dreiecke .....	122
	Die drei Seiten .....	122

	Pythagoreische Tripel .....	124
<b>6.3</b>	<b>Der Einheitskreis</b> .....	124
	Das Eckige muss in das Runde .....	124
	Unterwegs im Einheitskreis .....	125
	Periodizität .....	129
	Der Tangens .....	130
	Formeln mit Sinus und Cosinus .....	131
<b>6.4</b>	<b>Entspannungsübungen</b> .....	133
<b>6.5</b>	<b>Lösungen</b> .....	134

## **7 Wo ist meine Einheit? .....** 136

<b>7.1</b>	<b>Testen Sie sich selbst</b> .....	137
<b>7.2</b>	<b>Hoch, weit, schwer</b> .....	137
	Ur-Maße .....	137
	Maße und ihre Einheiten .....	139
<b>7.3</b>	<b>Von piko bis Tera</b> .....	141
	Das geht doch genauer ... ..	141
	Das geht doch genauer ... (Version für Computer, Roboter & Co.) .....	143
<b>7.4</b>	<b>Wahnsinnig große (und kleine) Zahlen</b> .....	143
	Exponentialdarstellung mit Zehnerpotenzen .....	143
<b>7.5</b>	<b>Runden, aber sinnvoll</b> .....	144
	Runden oder nicht runden, das ist hier die Frage .....	145
	Symmetrisch runden .....	145
<b>7.6</b>	<b>Entspannungsübungen</b> .....	147
<b>7.7</b>	<b>Lösungen</b> .....	148

## **8 Flächen und Räume .....** 150

<b>8.1</b>	<b>Testen Sie sich selbst</b> .....	151
<b>8.2</b>	<b>Flächeninhalt und Umfang</b> .....	151
	Flächeninhalte berechnen .....	151
	Flächenformeln zusammengefasst .....	152

	Umfang berechnen .....	154
<b>8.3</b>	<b>Volumen und Oberfläche</b> .....	155
	Volumeneinheiten .....	155
	Volumina von Körpern .....	156
	Oberflächen von Körpern .....	157
<b>8.4</b>	<b>Entspannungsübungen</b> .....	159
<b>8.5</b>	<b>Lösungen</b> .....	160

## **9 Vielleicht sechs Richtige** ..... 164

<b>9.1</b>	<b>Testen Sie sich selbst</b> .....	165
<b>9.2</b>	<b>Statistik</b> .....	166
	Arithmetisches Mittel .....	166
	Geometrisches Mittel .....	168
	Median .....	169
	Standardabweichung und Varianz .....	170
	Normalverteilung .....	172
<b>9.3</b>	<b>Wahrscheinlichkeit</b> .....	174
	Addition und Produkt .....	175
	Laplace-Experimente .....	175
	Würfel haben keine Erinnerung: Poisson-Verteilungen .....	176
	Permutationen .....	178
<b>9.4</b>	<b>Entspannungsübungen</b> .....	181
<b>9.5</b>	<b>Lösungen</b> .....	181

## **10 Herr Booles Algebra** ..... 184

<b>10.1</b>	<b>Testen Sie sich selbst</b> .....	185
<b>10.2</b>	<b>Aussagenlogik</b> .....	185
	Und und oder nicht .....	185
	Exklusives Oder .....	186
	Rechengesetze der booleschen Algebra .....	187
<b>10.3</b>	<b>Wie Computer rechnen</b> .....	188
	Digitale Zahlensysteme .....	189

10.4	Entspannungsübungen .....	192
10.5	Lösungen .....	192

## 11 Was zu beweisen ist ..... 194

11.1	Mathematische Beweise .....	195
11.2	Vollständige Induktion .....	195
	Das Induktionsprinzip .....	195
11.3	Indirekter Beweis .....	197
	Beweis durch Widerspruch .....	198
11.4	Entspannungsübung .....	201
11.5	Lösungen .....	201

## TEIL II Analysis

## 12 Folgen und Grenzwerte ..... 206

12.1	Zahlenfolgen .....	207
	Zahlen, Zahlen und kein Ende .....	207
	Rekursive Folgendefinitionen .....	208
	Geometrische Folgen .....	209
12.2	Grenzwerte und Konvergenz .....	210
	Wohin laufen sie denn? .....	210
	Das Verhalten von Nullfolgen .....	211
	Konvergenz .....	212
12.3	Entspannungsübungen .....	213
12.4	Lösungen .....	213

## 13 Reihen ..... 216

13.1	Unendliche Summen .....	217
	Partialsummen und Summenfolgen .....	217

	Konvergente Reihen .....	218
<b>13.2</b>	<b>Besondere Reihen</b> .....	219
	Die geometrische Reihe .....	219
	Die harmonische Reihe .....	221
	Noch mehr konvergente Reihen .....	222
<b>13.3</b>	<b>Entspannungsübungen</b> .....	223
<b>13.4</b>	<b>Lösungen</b> .....	223

## **14 Stetigkeit und Monotonie** ..... 224

<b>14.1</b>	<b>Grenzwerte von Funktionen</b> .....	225
	Lückenfüller .....	226
	Dreifolgensatz .....	228
	Von Epsilon und Delta .....	229
	Grenzwerte im Unendlichen .....	229
	Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen .....	231
<b>14.2</b>	<b>Stetige Funktionen</b> .....	232
	Definition der Stetigkeit .....	232
	Sätze über stetige Funktionen .....	233
	Monotonie .....	234
<b>14.3</b>	<b>Entspannungsübungen</b> .....	236
<b>14.4</b>	<b>Lösungen</b> .....	236

## **15 Funktionen ableiten** ..... 240

<b>15.1</b>	<b>Umschalten auf wahnsinnige Geschwindigkeit!</b> .....	241
	Ort, Zeit, Tempo .....	241
	Momentane Geschwindigkeit .....	244
<b>15.2</b>	<b>Die Steigung der Tangenten</b> .....	244
	Klitzekleine Steigungsdreiecke .....	244
	Differenzierbarkeit und Stetigkeit .....	246
	Die erste Ableitung .....	246
<b>15.3</b>	<b>Ableitungsregeln</b> .....	248
	Summenregel .....	249

Produktregel .....	249
Ableitung der Hyperbelfunktion .....	250
Kettenregel .....	251
Quotientenregel .....	252
Potenzregel und Polynome ableiten .....	253
<b>15.4 Entspannungsübungen .....</b>	<b>255</b>
<b>15.5 Lösungen .....</b>	<b>255</b>

## **16 Noch mehr Funktionen ableiten ..... 256**

<b>16.1 Exponentialfunktion ableiten .....</b>	<b>257</b>
Erste Ableitung von $e^x$ .....	257
Ableitung der Umkehrfunktion .....	258
Ableiten des Logarithmus .....	259
Ableiten von Potenzen mit reellem Exponenten .....	260
<b>16.2 Trigonometrische Funktionen .....</b>	<b>261</b>
Sinus und Cosinus .....	261
Ableitung des Tangens .....	262
<b>16.3 Entspannungsübungen .....</b>	<b>265</b>
<b>16.4 Lösungen .....</b>	<b>265</b>

## **17 Eigenschaften von Funktionen ..... 268**

<b>17.1 Funktionengeometrie .....</b>	<b>269</b>
Spiegelsymmetrie .....	269
Punktsymmetrie .....	270
Asymptotisches Verhalten .....	271
Extremstellen .....	274
Extremwertaufgaben .....	276
Sattel- und Wendepunkte .....	278
<b>17.2 Königsdisziplin Kurvendiskussion .....</b>	<b>279</b>
<b>17.3 Funktionen à la carte .....</b>	<b>283</b>
Selbstgestrickt .....	283
Zufall, selfmade .....	287

<b>17.4</b>	<b>Entspannungsübungen</b> .....	290
<b>17.5</b>	<b>Lösungen</b> .....	290

## **18 Integralrechnung** ..... 296

<b>18.1</b>	<b>Das riemannsche Integral</b> .....	297
	Eine Frage der Fläche .....	297
	Ober- und Untersummen .....	299
<b>18.2</b>	<b>Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung</b> .....	300
	Das unbestimmte Integral .....	301
	Stammfunktionen .....	302
	Der Fundamentalsatz der Analysis .....	302
	Potenzen und Polynome integrieren .....	304
	Partielle Integration .....	305
	Substitutionsregel .....	307
	Uneigentliche Integrale .....	310
	Integralkriterium .....	312
<b>18.3</b>	<b>Anwendungen der Integration</b> .....	313
	Integrale in der Physik .....	313
	Extremwertaufgaben mit Flächen .....	314
	Integrieren mit Sage .....	317
<b>18.4</b>	<b>Entspannungsübungen</b> .....	318
<b>18.5</b>	<b>Lösungen</b> .....	319

## **19 Die Bewegungsgleichung** ..... 322

<b>19.1</b>	<b>Kraft und Beschleunigung</b> .....	323
	Kraftlos .....	323
	Konstante Kraft .....	324
	Der Fall des Apfels .....	326
<b>19.2</b>	<b>Die zweite Dimension</b> .....	327
	Nur einen Steinwurf entfernt .....	327
	Die Wurfparabel .....	328
	Der optimale Wurfwinkel .....	329

<b>19.3</b>	<b>Entspannungsübungen</b> .....	332
<b>19.4</b>	<b>Lösungen</b> .....	332

## **20 Die Differentialgleichung erster Ordnung** ..... 334

<b>20.1</b>	<b>Wo Differentialgleichungen vorkommen</b> .....	335
	Strom, Spannung und Co. ....	335
	Auf die Bremse treten .....	337
	Tierpopulationen .....	338
<b>20.2</b>	<b>Die Differentialgleichung erster Ordnung lösen</b> .....	338
	Allgemeine Lösung .....	338
	Anfangsbedingungen und Randwerte .....	340
	Inhomogene Differentialgleichung lösen .....	341
<b>20.3</b>	<b>Entspannungsübungen</b> .....	346
<b>20.4</b>	<b>Lösungen</b> .....	346

## **21 Das Pünktchen auf dem $i$** ..... 348

<b>21.1</b>	<b>Die komplexen Zahlen</b> .....	349
	Schreibweisen .....	349
	Rechenregeln .....	350
	Der Fundamentalsatz der Algebra .....	351
	Multiplikation komplexer Zahlen .....	351
	Division komplexer Zahlen .....	352
<b>21.2</b>	<b>Die komplexe Zahlenebene</b> .....	353
	Komplexe Zahlen in der gaußschen Ebene .....	353
	Polarform .....	354
	Multiplikation in Polarform .....	356
<b>21.3</b>	<b>Die eulersche Formel</b> .....	358
	Immer im Kreis herum .....	358
	Die eulersche Identität .....	359
<b>21.4</b>	<b>Funktionen und Folgen mit komplexen Zahlen</b> .....	360
	Komplexe Funktionen ableiten .....	360
	Die Mandelbrotmenge .....	360

<b>21.5</b>	<b>Entspannungsübungen</b> .....	362
<b>21.6</b>	<b>Lösungen</b> .....	363

## **22 Hin und wieder zurück** ..... 364

<b>22.1</b>	<b>Der harmonische Oszillator</b> .....	365
	Nicht nur für Pendler .....	365
	Der Schwingkreis .....	367
<b>22.2</b>	<b>Differentialgleichung zweiter Ordnung</b> .....	368
	Lösung mit Eulers Formel .....	369
	Lösung mit Sinus-Cosinus-Ansatz .....	371
	Anfangs- und Randbedingungen .....	371
	Differentialgleichung mit Dämpfung .....	372
<b>22.3</b>	<b>Entspannungsübungen</b> .....	376
<b>22.4</b>	<b>Lösungen</b> .....	376

## **23 Mantelflächen und Kurvenlängen integrieren** ..... 380

<b>23.1</b>	<b>Kurvenlängen integrieren</b> .....	381
	Sehr kleine Hypotenusen .....	381
<b>23.2</b>	<b>Mantelflächenintegrale</b> .....	384
	Rotationskörper .....	384
<b>23.3</b>	<b>Entspannungsübungen</b> .....	387
<b>23.4</b>	<b>Lösungen</b> .....	387

## **24 Nicht-kartesische Koordinatensysteme** ..... 390

<b>24.1</b>	<b>Polarkoordinaten</b> .....	391
	Zweidimensionale Kreiskoordinaten .....	391
	Umrechnung zwischen kartesischen und Polarkoordinaten .....	392
	Infinitesimalrechnung in Polarkoordinaten .....	393

<b>24.2</b>	<b>Dreidimensionale Koordinatensysteme</b> .....	395
	Zylinderkoordinaten .....	395
	Kugelkoordinaten .....	396
<b>24.3</b>	<b>Entspannungsübungen</b> .....	399
<b>24.4</b>	<b>Lösungen</b> .....	399

## TEIL III Lineare Algebra

### **25 Vektorrechnung** ..... 404

<b>25.1</b>	<b>Vektoren in der euklidischen Ebene</b> .....	405
	Schreibweisen .....	405
	Eigenschaften von Vektoren .....	406
	Vektoren addieren .....	407
	Skalarmultiplikation .....	408
<b>25.2</b>	<b>Die Basis</b> .....	410
	Lineare Unabhängigkeit .....	410
	Einheitsvektoren und Basis .....	412
	Vektorrechnung mit Sage .....	412
<b>25.3</b>	<b>Entspannungsübungen</b> .....	414
<b>25.4</b>	<b>Lösungen</b> .....	414

### **26 Lineare Gleichungssysteme** ..... 418

<b>26.1</b>	<b>Das Gauß-Verfahren</b> .....	419
	Umformen in Dreiecksform .....	419
	Matrix-Schreibweise .....	421
	Gleichungssysteme lösen mit Sage .....	422
<b>26.2</b>	<b>Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme</b> .....	422
	Bedingungen für Lösbarkeit .....	422
	Lösbarkeit homogener Gleichungssysteme .....	423
	Die Determinante .....	424
	Die Regel von Sarrus .....	426
	Cramersche Regel .....	426

<b>26.3</b>	<b>Entspannungsübungen</b> .....	428
<b>26.4</b>	<b>Lösungen</b> .....	428
<b>27 Willkommen in der Matrix</b> .....		<b>430</b>
<b>27.1</b>	<b>Lineare Abbildungen</b> .....	431
	Definition linearer Abbildungen .....	431
	Eigenschaften linearer Abbildungen .....	432
	Kern, Bild und Dimensionsformel .....	433
	Praktische Anwendungen .....	434
<b>27.2</b>	<b>Verknüpfung linearer Abbildungen</b> .....	434
	Summen von Matrizen .....	435
	Vielfache von Matrizen .....	435
	Matrizenmultiplikation .....	435
	Die inverse Abbildung .....	437
	Matrizenrechnung mit Sage .....	439
<b>27.3</b>	<b>Entspannungsübungen</b> .....	441
<b>27.4</b>	<b>Lösungen</b> .....	441
<b>28 Eigenwerte, Determinanten und Co.</b> .....		<b>444</b>
<b>28.1</b>	<b>Matrizen unter der Lupe</b> .....	445
	Determinante und Invertierbarkeit .....	445
	Basiswechselmatrix .....	446
<b>28.2</b>	<b>Eigenwerte</b> .....	448
	Das Eigenwertproblem .....	448
	Berechnung von Eigenwerten .....	449
	Eigenräume .....	451
	Diagonalisieren .....	451
<b>28.3</b>	<b>Produkte</b> .....	454
	Skalarprodukt .....	454
	Kreuzprodukt .....	456
<b>28.4</b>	<b>Entspannungsübungen</b> .....	459
<b>28.5</b>	<b>Lösungen</b> .....	460

## 29 Besondere Matrizen anwenden ..... 464

<b>29.1 Geometrische Transformationen</b> .....	465
Orthonormalsysteme .....	465
Isometrien .....	465
Spiegelmatrizen .....	467
Drehmatrizen .....	467
Koordinatentransformation .....	468
<b>29.2 Bildbearbeitung</b> .....	470
Faltungsmatrizen .....	470
<b>29.3 Entspannungsübungen</b> .....	473
<b>29.4 Lösungen</b> .....	473

## 30 Mehrdimensionale Analysis ..... 476

<b>30.1 Abbildungen in mehr als einer Dimension</b> .....	477
Vektoren und ihre Schreibweisen .....	477
Mehrdimensionale Funktionen .....	478
<b>30.2 Differentialrechnung in <math>\mathbb{R}^n</math></b> .....	480
Partielle Ableitungen .....	480
Der Gradient .....	481
Die Jacobimatrix .....	483
Jacobimatrix und Koordinatentransformation .....	484
<b>30.3 Entspannungsübungen</b> .....	486
<b>30.4 Lösungen</b> .....	486

## 31 Numerische Verfahren ..... 488

<b>31.1 Intervallschachtelung</b> .....	489
Fortgesetzte Bisektion .....	489
Kontinuierlicher Fall .....	490
<b>31.2 Interpolation</b> .....	492
Polynominterpolation .....	493
Lagrangesche Interpolationsformel .....	494

<b>31.3</b>	<b>Ausgleichsrechnung</b> .....	496
	Methode der kleinsten Quadrate .....	496
	Beispiel: Erdbeschleunigung mit dem Handy messen .....	496
<b>31.4</b>	<b>Numerische Integration</b> .....	498
	Trapezregel .....	499
	Adaptive Integration mit Sage .....	500
<b>31.5</b>	<b>Entspannungsübungen</b> .....	502
<b>31.6</b>	<b>Lösungen</b> .....	503

## **32 Analytische Geometrie** ..... 506

<b>32.1</b>	<b>Ein Universum voller Vektoren</b> .....	507
	Eine Gerade .....	507
	Zwei Geraden .....	509
	Ebenen .....	511
	Normale .....	513
	Hessesche Normalenform .....	515
	Kugeln .....	517
<b>32.2</b>	<b>Begegnungen im Nichts</b> .....	519
	Gerade trifft Ebene .....	519
	Ebene trifft Ebene .....	521
	Projektion und Spiegel .....	522
	Der Kreis schließt sich .....	524
<b>32.3</b>	<b>Entspannungsübungen</b> .....	529
<b>32.4</b>	<b>Lösungen</b> .....	530

	Formelsammlung .....	534
	Literaturverzeichnis .....	538
	Index .....	539