

Auf einen Blick

TEIL I	
Grundlagen	23
TEIL II	
Analysis	205
TEIL III	
Lineare Algebra	403

Inhalt

Einleitung	21
------------------	----

TEIL I Grundlagen

1 Mengenweise Mengen 24

1.1 Testen Sie sich selbst	25
1.2 Mengen und Elemente	25
Vereinigungs- und Schnittmengen	27
Unter- und Obermengen	27
Vordefinierte Mengen	28
1.3 Spannungsübungen	30
1.4 Lösungen	30

2 Gesetze der Algebra 32

2.1 Testen Sie sich selbst	33
2.2 Gesetze, die jeder kennt	34
Vertauschen (fast) nach Belieben	34
Das Verteilungsgesetz	35
Zig Prozent auf alles!	37
Zinsen bitte!	38
Die Minusklammer	38
Binomische Formeln	39
2.3 Brüche, gemischt und dezimal	40
Gemeine Brüche	40
Kürzen und erweitern	41
Rechnen mit Brüchen	42
Gemischte Brüche	44
Dezimalkommazahlen	45

2.4	Potenzen und Wurzeln	47
	Die Potenzgesetze	47
	Umkehren von Potenzen	49
	Wurzeln und gebrochene Exponenten	49
2.5	Entspannungsübungen	51
2.6	Lösungen	52

3 (Un-)gleichungen 54

3.1	Testen Sie sich selbst	55
3.2	Einfache Gleichungen und Ungleichungen	56
	Gleichungen umformen	56
	Ungleichungen lösen	58
3.3	Quadratische Gleichungen und Bruchgleichungen	59
	Die Wurzel ziehen	60
	Quadratische Ergänzung	60
	Bruchgleichungen	62
3.4	Gleichungssysteme	63
	Lineare Gleichungssysteme	63
	Das Gleichsetzungsverfahren	64
	Das Additions- bzw. Subtraktionsverfahren	65
	Das Einsetzungsverfahren	66
3.5	Sachaufgaben	67
	Lösung mit System	67
3.6	Gleichungen lösen mit dem PC	69
	Bühne frei für Sage	70
	Gleichungen lösen mit Sage	70
3.7	Entspannungsübungen	73
3.8	Lösungen	74

4 Funktionen im kartesischen Koordinatensystem 82

4.1	Testen Sie sich selbst	83
4.2	Das Achsenkreuz	83
4.3	Lineare Funktionen	85
	Graphen zeichnen	85
	Plotten mit Sage	86
4.4	Parabeln	88
	Die Normalparabel	88
	Noch mehr Parabeln	90
	Rechenspiele mit Parabeln	91
4.5	Wurzel- und andere Funktionen	93
	Halbe Exponenten	93
	Die (Halb-)Kreisfunktion	95
4.6	Entspannungsübungen	97
4.7	Lösungen	98

5 e und log 104

5.1	Testen Sie sich selbst!	105
5.2	Mehr, mehr, mehr!	105
	Eulers Zahl	106
	Weniger, aber niemals nichts	110
5.3	Logarithmen und ihre Regeln	111
	Logarithmen zu verschiedenen Basen	111
5.4	Entspannungsübungen	115
5.5	Lösungen	116

6 Sinus und Cosinus 120

6.1	Testen Sie sich selbst	121
6.2	Rechtwinklige Dreiecke	122
	Die drei Seiten	122

	Pythagoreische Tripel	124
6.3	Der Einheitskreis	124
	Das Eckige muss in das Runde	124
	Unterwegs im Einheitskreis	125
	Periodizität	129
	Der Tangens	130
	Formeln mit Sinus und Cosinus	131
6.4	Entspannungsübungen	133
6.5	Lösungen	134

7 Wo ist meine Einheit? 136

7.1	Testen Sie sich selbst	137
7.2	Hoch, weit, schwer	137
	Ur-Maße	137
	Maße und ihre Einheiten	139
7.3	Von piko bis Tera	141
	Das geht doch genauer	141
	Das geht doch genauer ... (Version für Computer, Roboter & Co.)	143
7.4	Wahnsinnig große (und kleine) Zahlen	143
	Exponentialdarstellung mit Zehnerpotenzen	143
7.5	Runden, aber sinnvoll	144
	Runden oder nicht runden, das ist hier die Frage	145
	Symmetrisch runden	145
7.6	Entspannungsübungen	147
7.7	Lösungen	148

8 Flächen und Räume 150

8.1	Testen Sie sich selbst	151
8.2	Flächeninhalt und Umfang	151
	Flächeninhalte berechnen	151
	Flächenformeln zusammengefasst	152

	Umfang berechnen	154
8.3	Volumen und Oberfläche	155
	Volumeneinheiten	155
	Volumina von Körpern	156
	Oberflächen von Körpern	157
8.4	Entspannungsübungen	159
8.5	Lösungen	160

9 Vielleicht sechs Richtige 164

9.1	Testen Sie sich selbst	165
9.2	Statistik	166
	Arithmetisches Mittel	166
	Geometrisches Mittel	168
	Median	169
	Standardabweichung und Varianz	170
	Normalverteilung	172
9.3	Wahrscheinlichkeit	174
	Addition und Produkt	175
	Laplace-Experimente	175
	Würfel haben keine Erinnerung: Poisson-Verteilungen	176
	Permutationen	178
9.4	Entspannungsübungen	181
9.5	Lösungen	181

10 Herrn Booles Algebra 184

10.1	Testen Sie sich selbst	185
10.2	Aussagenlogik	185
	Und und oder nicht	185
	Exklusives Oder	186
	Rechengesetze der booleschen Algebra	187
10.3	Wie Computer rechnen	188
	Digitale Zahlensysteme	189

10.4	Entspannungsübungen	192
10.5	Lösungen	192

11 Was zu beweisen ist 194

11.1	Mathematische Beweise	195
11.2	Vollständige Induktion	195
	Das Induktionsprinzip	195
11.3	Indirekter Beweis	197
	Beweis durch Widerspruch	198
11.4	Entspannungsübung	201
11.5	Lösungen	201

TEIL II Analysis

12 Folgen und Grenzwerte 206

12.1	Zahlenfolgen	207
	Zahlen, Zahlen und kein Ende	207
	Rekursive Folgendefinitionen	208
	Geometrische Folgen	209
12.2	Grenzwerte und Konvergenz	210
	Wohin laufen sie denn?	210
	Das Verhalten von Nullfolgen	211
	Konvergenz	212
12.3	Entspannungsübungen	213
12.4	Lösungen	213

13 Reihen 216

13.1	Unendliche Summen	217
	Partialsummen und Summenfolgen	217

	Konvergente Reihen	218
13.2	Besondere Reihen	219
	Die geometrische Reihe	219
	Die harmonische Reihe	221
	Noch mehr konvergente Reihen	222
13.3	Entspannungsübungen	223
13.4	Lösungen	223

14 Stetigkeit und Monotonie 224

14.1	Grenzwerte von Funktionen	225
	Lückenfüller	226
	Dreifolgensatz	228
	Von Epsilon und Delta	229
	Grenzwerte im Unendlichen	229
	Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen	231
14.2	Stetige Funktionen	232
	Definition der Stetigkeit	232
	Sätze über stetige Funktionen	233
	Monotonie	234
14.3	Entspannungsübungen	236
14.4	Lösungen	236

15 Funktionen ableiten 240

15.1	Umschalten auf wahnsinnige Geschwindigkeit!	241
	Ort, Zeit, Tempo	241
	Momentane Geschwindigkeit	244
15.2	Die Steigung der Tangenten	244
	Klitzekleine Steigungsdreiecke	244
	Differenzierbarkeit und Stetigkeit	246
	Die erste Ableitung	246
15.3	Ableitungsregeln	248
	Summenregel	249

Produktregel	249
Ableitung der Hyperbelfunktion	250
Kettenregel	251
Quotientenregel	252
Potenzregel und Polynome ableiten	253
15.4 Entspannungsübungen	255
15.5 Lösungen	255

16 Noch mehr Funktionen ableiten 256

16.1 Exponentialfunktion ableiten	257
Erste Ableitung von e^x	257
Ableitung der Umkehrfunktion	258
Ableiten des Logarithmus	259
Ableiten von Potenzen mit reellem Exponenten	260
16.2 Trigonometrische Funktionen	261
Sinus und Cosinus	261
Ableitung des Tangens	262
16.3 Entspannungsübungen	265
16.4 Lösungen	265

17 Eigenschaften von Funktionen 268

17.1 Funktionengeometrie	269
Spiegelsymmetrie	269
Punktsymmetrie	270
Asymptotisches Verhalten	271
Extremstellen	274
Extremwertaufgaben	276
Sattel- und Wendepunkte	278
17.2 Königsdisziplin Kurvendiskussion	279
17.3 Funktionen à la carte	283
Selbstgestrickt	283
Zufall, selfmade	287

17.4	Entspannungsübungen	290
17.5	Lösungen	290

18 Integralrechnung 296

18.1	Das riemannsche Integral	297
	Eine Frage der Fläche	297
	Ober- und Untersummen	299
18.2	Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	300
	Das unbestimmte Integral	301
	Stammfunktionen	302
	Der Fundamentalsatz der Analysis	302
	Potenzen und Polynome integrieren	304
	Partielle Integration	305
	Substitutionsregel	307
	Uneigentliche Integrale	310
	Integralkriterium	312
18.3	Anwendungen der Integration	313
	Integrale in der Physik	313
	Extremwertaufgaben mit Flächen	314
	Integrieren mit Sage	317
18.4	Entspannungsübungen	318
18.5	Lösungen	319

19 Die Bewegungsgleichung 322

19.1	Kraft und Beschleunigung	323
	Kraftlos	323
	Konstante Kraft	324
	Der Fall des Apfels	326
19.2	Die zweite Dimension	327
	Nur einen Steinwurf entfernt	327
	Die Wurfparabel	328
	Der optimale Wurfwinkel	329

19.3	Entspannungsübungen	332
19.4	Lösungen	332

20 Die Differentialgleichung erster Ordnung 334

20.1	Wo Differentialgleichungen vorkommen	335
	Strom, Spannung und Co.	335
	Auf die Bremse treten	337
	Tierpopulationen	338
20.2	Die Differentialgleichung erster Ordnung lösen	338
	Allgemeine Lösung	338
	Anfangsbedingungen und Randwerte	340
	Inhomogene Differentialgleichung lösen	341
20.3	Entspannungsübungen	346
20.4	Lösungen	346

21 Das Pünktchen auf dem i 348

21.1	Die komplexen Zahlen	349
	Schreibweisen	349
	Rechenregeln	350
	Der Fundamentalsatz der Algebra	351
	Multiplikation komplexer Zahlen	351
	Division komplexer Zahlen	352
21.2	Die komplexe Zahlenebene	353
	Komplexe Zahlen in der gaußschen Ebene	353
	Polarform	354
	Multiplikation in Polarform	356
21.3	Die eulersche Formel	358
	Immer im Kreis herum	358
	Die eulersche Identität	359
21.4	Funktionen und Folgen mit komplexen Zahlen	360
	Komplexe Funktionen ableiten	360
	Die Mandelbrotmenge	360

21.5	Entspannungsübungen	362
21.6	Lösungen	363

22 Hin und wieder zurück 364

22.1	Der harmonische Oszillator	365
	Nicht nur für Pendler	365
	Der Schwingkreis	367
22.2	Differentialgleichung zweiter Ordnung	368
	Lösung mit Eulers Formel	369
	Lösung mit Sinus-Cosinus-Ansatz	371
	Anfangs- und Randbedingungen	371
	Differentialgleichung mit Dämpfung	372
22.3	Entspannungsübungen	376
22.4	Lösungen	376

23 Mantelflächen und Kurvenlängen integrieren 380

23.1	Kurvenlängen integrieren	381
	Sehr kleine Hypotenusen	381
23.2	Mantelflächenintegrale	384
	Rotationskörper	384
23.3	Entspannungsübungen	387
23.4	Lösungen	387

24 Nicht-kartesische Koordinatensysteme 390

24.1	Polarkoordinaten	391
	Zweidimensionale Kreiskoordinaten	391
	Umrechnung zwischen kartesischen und Polarkoordinaten	392
	Infinitesimalrechnung in Polarkoordinaten	393

24.2	Dreidimensionale Koordinatensysteme	395
	Zylinderkoordinaten	395
	Kugelkoordinaten	396
24.3	Entspannungsübungen	399
24.4	Lösungen	399

TEIL III Lineare Algebra

25 Vektorrechnung 404

25.1	Vektoren in der euklidischen Ebene	405
	Schreibweisen	405
	Eigenschaften von Vektoren	406
	Vektoren addieren	407
	Skalarmultiplikation	408
25.2	Die Basis	410
	Lineare Unabhängigkeit	410
	Einheitsvektoren und Basis	412
	Vektorrechnung mit Sage	412
25.3	Entspannungsübungen	414
25.4	Lösungen	414

26 Lineare Gleichungssysteme 418

26.1	Das Gauß-Verfahren	419
	Umformen in Dreiecksform	419
	Matrix-Schreibweise	421
	Gleichungssysteme lösen mit Sage	422
26.2	Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme	422
	Bedingungen für Lösbarkeit	422
	Lösbarkeit homogener Gleichungssysteme	423
	Die Determinante	424
	Die Regel von Sarrus	426
	Cramersche Regel	426

26.3	Entspannungsübungen	428
26.4	Lösungen	428
27 Willkommen in der Matrix		
27.1	Lineare Abbildungen	431
	Definition linearer Abbildungen	431
	Eigenschaften linearer Abbildungen	432
	Kern, Bild und Dimensionsformel	433
	Praktische Anwendungen	434
27.2	Verknüpfung linearer Abbildungen	434
	Summen von Matrizen	435
	Vielfache von Matrizen	435
	Matrizenmultiplikation	435
	Die inverse Abbildung	437
	Matrizenrechnung mit Sage	439
27.3	Entspannungsübungen	441
27.4	Lösungen	441
28 Eigenwerte, Determinanten und Co.		
28.1	Matrizen unter der Lupe	445
	Determinante und Invertierbarkeit	445
	Basiswechselmatrix	446
28.2	Eigenwerte	448
	Das Eigenwertproblem	448
	Berechnung von Eigenwerten	449
	Eigenräume	451
	Diagonalisieren	451
28.3	Produkte	454
	Skalarprodukt	454
	Kreuzprodukt	456
28.4	Entspannungsübungen	459
28.5	Lösungen	460

29 Besondere Matrizen anwenden 464

29.1 Geometrische Transformationen	465
Orthonormalsysteme	465
Isometrien	465
Spiegelmatrizen	467
Drehmatrizen	467
Koordinatentransformation	468
29.2 Bildbearbeitung	470
Faltungsmatrizen	470
29.3 Entspannungsübungen	473
29.4 Lösungen	473

30 Mehrdimensionale Analysis 476

30.1 Abbildungen in mehr als einer Dimension	477
Vektoren und ihre Schreibweisen	477
Mehrdimensionale Funktionen	478
30.2 Differentialrechnung in \mathbb{R}^n	480
Partielle Ableitungen	480
Der Gradient	481
Die Jacobimatrix	483
Jacobimatrix und Koordinatentransformation	484
30.3 Entspannungsübungen	486
30.4 Lösungen	486

31 Numerische Verfahren 488

31.1 Intervallschachtelung	489
Fortgesetzte Bisektion	489
Kontinuierlicher Fall	490
31.2 Interpolation	492
Polynominterpolation	493
Lagrangesche Interpolationsformel	494

31.3	Ausgleichsrechnung	496
	Methode der kleinsten Quadrate	496
	Beispiel: Erdbeschleunigung mit dem Handy messen	496
31.4	Numerische Integration	498
	Trapezregel	499
	Adaptive Integration mit Sage	500
31.5	Entspannungsübungen	502
31.6	Lösungen	503

32 Analytische Geometrie 506

32.1	Ein Universum voller Vektoren	507
	Eine Gerade	507
	Zwei Geraden	509
	Ebenen	511
	Normale	513
	Hessesche Normalenform	515
	Kugeln	517
32.2	Begegnungen im Nichts	519
	Gerade trifft Ebene	519
	Ebene trifft Ebene	521
	Projektion und Spiegel	522
	Der Kreis schließt sich	524
32.3	Entspannungsübungen	529
32.4	Lösungen	530

	Formelsammlung	534
	Literaturverzeichnis	538
	Index	539