

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Die Finite-Elemente-Methode im Überblick	1
1.2	Grundlagen zur Modellbildung	2
	Literatur	4
2	Motivation zur Finite-Elemente-Methode	5
2.1	Aus der ingenieurmäßigen Anschauung motivierte Verfahren	5
2.1.1	Die Matrix-Steifigkeitsmethode	6
2.1.2	Übergang zum Kontinuum	10
2.2	Integralprinzipien	16
2.3	Die Methode der gewichteten Residuen	18
2.3.1	Verfahren auf Basis des inneren Produktes	19
2.3.2	Verfahren auf Basis der schwachen Formulierung	22
2.3.3	Verfahren auf Basis der inversen Formulierung	24
2.4	Beispielprobleme	25
	Literatur	30
3	Stabelement	31
3.1	Grundlegende Beschreibung zum Zugstab	31
3.2	Das Finite Element Zugstab	33
3.2.1	Herleitung über Potenzial	37
3.2.2	Herleitung über Satz von Castigliano	38
3.2.3	Herleitung über das Prinzip der gewichteten Residuen	39
3.2.4	Herleitung über das Prinzip der virtuellen Arbeit	42
3.3	Beispielprobleme und weiterführende Aufgaben	44
3.3.1	Beispielprobleme	44
3.3.2	Weiterführende Aufgaben	49
	Literatur	49
4	Analogien zum Dehnstab	51
4.1	Grundlegende Beschreibungen zum Torsionsstab	51
4.2	Das Finite Element Torsionsstab	54

4.3	Grundlegende Beschreibungen zum Temperaturstab	56
4.4	Das Finite Element Temperaturstab	57
4.5	Thermoelastizität	59
4.6	Beispiele und Zusatzaufgaben	61
	Literatur	65
5	Biegeelement	67
5.1	Einführende Bemerkungen	67
5.2	Grundlegende Beschreibung zum Balken	69
5.2.1	Kinematik	69
5.2.2	Gleichgewicht	74
5.2.3	Stoffgesetz	75
5.2.4	Differenzialgleichung der Biegelinie	77
5.2.5	Analytische Lösungen	78
5.3	Das Finite Element ebener Biegebalken	82
5.3.1	Herleitung über Potenzial	86
5.3.2	Herleitung über das Prinzip der gewichteten Residuen	89
5.3.3	Herleitung über das Prinzip der virtuellen Arbeit	93
5.3.4	Anmerkungen zur Ableitung der Formfunktionen	94
5.4	Das Finite Element Biegebalken mit zwei Verformungsebenen	97
5.5	Ermittlung äquivalenter Knotenlasten	98
5.6	Beispielprobleme und weiterführende Aufgaben	103
5.6.1	Beispielprobleme	103
5.6.2	Weiterführende Aufgaben	111
	Literatur	113
6	Allgemeines 1D-Element	115
6.1	Überlagerung zum allgemeinen 1D-Element	115
6.1.1	Beispiel 1: Stab unter Zug und Torsion	118
6.1.2	Beispiel 2: Balken in der Ebene mit Zuganteil	119
6.2	Koordinatentransformation	120
6.2.1	Ebene Tragwerke	121
6.2.2	Allgemeine dreidimensionale Tragwerke	123
6.3	Numerische Integration eines Finiten Elementes	126
6.4	Interpolationsfunktion	128
6.5	Einheitsbereich	131
6.6	Weiterführende Aufgaben	132
	Literatur	132
7	Ebene und räumliche Rahmenstrukturen	133
7.1	Aufbau der Gesamtsteifigkeitsbeziehung	133
7.2	Lösen der Systemgleichung	137
7.3	Postprocessing	138

7.4	Beispiele in der Ebene	139
7.4.1	Ebenes Tragwerk mit zwei Stäben	139
7.4.2	Ebenes Tragwerk: Balken und Stab	143
7.5	Beispiele im Dreidimensionalen	148
7.6	Weiterführende Aufgaben	155
	Literatur	156
8	Balken mit Schubanteil	157
8.1	Einführende Bemerkungen	157
8.2	Grundlegende Beschreibung zum Balken mit Schubeffekt	161
8.2.1	Kinematik	161
8.2.2	Gleichgewicht	163
8.2.3	Stoffgesetz	163
8.2.4	Differenzialgleichungen der Biegelinie	164
8.2.5	Analytische Lösungen	165
8.3	Das Finite Element ebener Biegebalken mit Schubanteil	169
8.3.1	Herleitung über Potenzial	170
8.3.2	Herleitung über Satz von Castigliano	174
8.3.3	Herleitung über das Prinzip der gewichteten Residuen	175
8.3.4	Herleitung über das Prinzip der virtuellen Arbeit	179
8.3.5	Lineare Ansatzfunktionen für das Durchbiegungs- und Verschiebungsfeld	182
8.3.6	Höhere Ansatzfunktionen für den Balken mit Schubanteil	192
8.4	Beispielprobleme und weiterführende Aufgaben	197
8.4.1	Beispielprobleme	197
8.4.2	Weiterführende Aufgaben	206
	Literatur	207
9	Balken aus Verbundmaterial	209
9.1	Verbundwerkstoffe	209
9.2	Anisotropes Stoffverhalten	210
9.2.1	Spezielle Symmetrien	212
9.2.2	Ingenieur-Konstanten	214
9.2.3	Transformationsverhalten	216
9.2.4	Ebene Spannungszustände	218
9.3	Einführung in die Mikromechanik der Faserverbundwerkstoffe	222
9.4	Mehrschichtiger Verbund	224
9.4.1	Eine Schicht im Verbund	224
9.4.2	Der vielschichtige Verbund	227
9.5	Eine Finite-Elemente-Formulierung	228
9.5.1	Der Verbundstab	228
9.5.2	Der Verbundbalken	229

9.6	Beispielprobleme und weiterführende Aufgaben	231
	Literatur	231
10	Nichtlineare Elastizität	233
10.1	Einführende Bemerkungen	233
10.2	Elementsteifigkeitsmatrix für dehnungsabhängige Elastizität	235
10.3	Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems	241
10.3.1	Direkte Iteration	241
10.3.2	Vollständiges Newton-Raphsonsches Verfahren	245
10.3.3	Modifiziertes Newton-Raphsonsches Verfahren	258
10.3.4	Konvergenzkriterien	262
10.4	Beispielprobleme und weiterführende Aufgaben	263
10.4.1	Beispielprobleme	263
10.4.2	Weiterführende Aufgaben	271
	Literatur	273
11	Plastizität	275
11.1	Kontinuumsmechanische Grundlagen	275
11.1.1	Fließbedingung	276
11.1.2	Fließregel	278
11.1.3	Verfestigungsgesetz	279
11.1.4	Elasto-plastischer Stoffmodul	280
11.2	Integration der Materialgleichungen	281
11.3	Ableitung des vollständigen impliziten Backward-Euler-Algorithmus	287
11.3.1	Mathematische Ableitung	287
11.3.2	Interpretation als konvexes Optimierungsproblem	293
11.4	Ableitung des semi-impliziten Backward-Euler-Algorithmus	297
11.5	Beispielprobleme und weiterführende Aufgaben	298
11.5.1	Beispielprobleme	298
11.5.2	Weiterführende Aufgaben	321
	Literatur	322
12	Stabilität (Knickung)	325
12.1	Stabilität im Stab/Balken	325
12.2	Große Verformungen	327
12.3	Steifigkeitsmatrizen bei großen Verformungen	329
12.3.1	Stab mit großen Verformungen	330
12.3.2	Balken mit großen Verformungen	332
12.4	Beispiele zum Knicken: Die vier Eulerschen Knickfälle	334
12.4.1	Analytische Lösung zu den Eulerschen Knickfällen	334
12.4.2	Finite-Elemente-Lösung	335
12.5	Weiterführende Aufgaben	336
	Literatur	337

13	Dynamik	339
	13.1 Grundlagen zur linearen Dynamik	339
	13.2 Die Massenmatrizen	342
	13.3 Modale Analyse	343
	13.4 Erzwungene Schwingungen, Periodische Belastungen	345
	13.5 Direkte Integrationsverfahren, Transiente Analysen	346
	13.5.1 Integration nach Newmark	347
	13.5.2 Zentrales Differenzenverfahren	348
	13.6 Beispiele	349
	13.6.1 Bereitstellung von Massen- und Steifigkeitsmatrizen	350
	13.6.2 Dehnschwingungen im Zugstab	355
	13.7 Weiterführende Aufgaben	370
	Literatur	370
14	Spezialelemente	371
	14.1 Elastische Bettung	371
	14.2 Spannungssingularität	374
	14.3 Unendliche Ausdehnung	379
	14.4 Weiterführende Aufgaben	383
	Literatur	384
Anhang	385
	A.1 Mathematik	385
	A.1.1 Das griechische Alphabet	385
	A.1.2 Häufig benutzte Konstanten	386
	A.1.3 Spezielle Produkte	386
	A.1.4 Trigonometrische Funktionen	386
	A.1.5 Grundlagen zur linearen Algebra	389
	A.1.6 Ableitungen	394
	A.1.7 Integration	395
	A.1.8 Entwicklung einer Funktion in eine Taylorsche Reihe	397
	A.2 Einheiten und Umrechnung	397
	A.2.1 Konsistente Einheiten	397
	A.3 Mechanik	399
	A.3.1 Flächenträgheitsmomente 2. Grades	399
	A.3.2 Äquivalente Knotenlasten für Biegeelement	400
	A.3.3 Eigenschaften verschiedener Querschnitte in der y - z -Ebene	401
	A.3.4 Geschlossene Lösungen der Biegelinie	402
Kurzlösungen	403
Stichwortverzeichnis	429