

Inhaltsverzeichnis

Teil I: Matrizen und Lineare Algebra

1. Grundbegriffe der Matrizenrechnung	3
1.1. Einführung	3
1.2. Definition und Bezeichnung von Matrizen	3
1.3. Besondere Matrizen	5
1.4. Gleichheit, Addition und Subtraktion von Matrizen; Multiplikation mit einem Skalar	8
1.5. Matrizenmultiplikation	9
1.6. Die inverse Matrix	15
1.7. Teilung von Matrizen	17
1.8. Spur und Determinante einer Matrix	19
Literatur	22
2. Vektoren, Matrizen und Tensoren	23
2.1. Einführung	23
2.2. Vektorräume, Unterräume und Spannweite einer Matrix	23
2.3. Matrizendarstellung der linearen Transformation	30
2.4. Wechsel der Basis	34
2.5. Matrizendarstellung von Variationsprinzipien	36
2.6. Definition von Tensoren	43
2.7. Das Eigenproblem $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ mit symmetrischer Matrix \mathbf{A}	50
2.8. Der Rayleighsche Quotient und die Maximum-Minimum-Eigenschaft der Eigenwerte	61
2.9. Vektor- und Matrixnormen	67
Literatur	72

Teil II: Die Methode der finiten Elemente

3. Einige Grundbegriffe ingenieurwissenschaftlicher Berechnungen	75
3.1. Einführung	75
3.2. Berechnung diskreter Systeme	76
3.2.1. Stationäre Probleme	76

3.2.2. Ausbreitungsprobleme	86
3.2.3. Eigenwertprobleme	89
3.2.4. Über das Wesen von Lösungen	96
3.3. Berechnung von kontinuierlichen Systemen	102
3.3.1. Differentielle Formulierung	102
3.3.2. Variationsformulierung	108
3.3.3. Verfahren des gewichteten Restes; Ritzsches Verfahren	114
3.4. Zwangsbedingungen	123
Literatur	126
4. Formulierung der Methode der finiten Elemente; lineare Berechnungen in der Festkörper- und Strukturmechanik	128
4.1. Einführung	128
4.2. Formulierung der Verschiebungsmethode	129
4.2.1. Allgemeine Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen für finite Elemente	134
4.2.2. Vorgabe von Randbedingungen	155
4.2.3. Verallgemeinerte Koordinatenmodelle für spezielle Probleme	160
4.2.4. Konzentration von Struktureigenschaften und Lasten	180
4.2.5. Konvergenz von Rechenergebnissen	182
4.2.6. Spannungsberechnung	197
4.3. Inkompatible, gemischte und hybride Finite-Elemente-Modelle; Methoden der finiten Differenzen	198
4.3.1. Kompatible Modelle	199
4.3.2. Gemischte und hybride Modelle	202
4.3.3. Differentielle und energetische Methoden der finiten Differenzen	208
Literatur	213
5. Formulierung und Berechnung von isoparametrischen Finite-Elemente-Matrizen	216
5.1. Einführung	216
5.2. Isoparametrische Ableitung der Steifigkeitsmatrix eines Stabelementes	216
5.3. Formulierung von Elementen für Kontinua	218
5.3.1. Rechtwinklige Elemente	219
5.3.2. Dreieckselemente	243
5.3.3. Element-Matrizen im globalen Koordinatensystem	257
5.4. Formulierung von Strukturelementen	258
5.4.1. Balkenelemente	259
5.4.2. Platten- und Schalelemente	278
5.5. Konvergenzbetrachtungen	287
5.5.1. Kontinuumselemente	287
5.5.2. Strukturelemente	290

5.6. Zugeordnete Elementfamilien	293
5.6.1. Verschiedenartige Interpolationen	293
5.6.2. Addition von inkompatiblen Moden	294
5.7. Numerische Integration	296
5.7.1. Interpolation mit einem Polynom	297
5.7.2. Newton-Cotes-Quadratur (eindimensionale Integration)	298
5.7.3. Gauß-Quadratur (eindimensionale Integration)	302
5.7.4. Integration in zwei und drei Dimensionen	305
5.8. Praktische Überlegungen zum Rechnen mit isoparametrischen Elementen	309
5.8.1. Numerische Integration	309
5.8.2. Spannungsberechnung	317
5.8.3. Einige Bemerkungen zur Modellbildung	319
5.9. Ein Computerprogramm für isoparametrische finite Elemente	324
Literatur	327
6. Finite Elemente in der nichtlinearen Festkörper- und Strukturmechanik	331
6.1. Einführung in die Behandlung nichtlinearer Probleme	331
6.2. Formulierung der inkrementellen Bewegungsgleichungen in der Kontinuumsmechanik	345
6.2.1. Das Grundproblem	346
6.2.2. Spannungs- und Verzerrungstensoren	350
6.2.3. Totale und umgeformte Lagrangesche Formulierung, nur physikalisch nichtlineare Berechnung	368
6.3. Diskretisierung mit isoparametrischen finiten Elementen	375
6.3.1. Stab- und Seilelemente	379
6.3.2. Zweidimensionale Elemente für Axialsymmetrie sowie ebene Verzerrungs- und Spannungszustände	385
6.3.3. Dreidimensionale Festkörperelemente	393
6.3.4. Balkenelemente	397
6.3.5. Platten- und Schalelemente	407
6.4. Verwendung von Materialgleichungen	415
6.4.1. Elastisches Materialverhalten	417
6.4.2. Nichtelastisches Materialverhalten unter besonderer Berücksichtigung von elastisch-plastischen und kriechenden Werkstoffen	423
6.5. Einige praktische Überlegungen	435
6.5.1. Der allgemeine Zugang zu nichtlinearen Berechnungen	436
6.5.2. Berechnung von Versagen, Knicken und Beulen	437
6.5.3. Verzerrung der Elemente	440
6.5.4. Ordnung der numerischen Integration	441
Literatur	445
7. Finite-Elemente-Berechnungen von Wärmeübertragungs- und Feldproblemen sowie Flüssigkeitsströmungen	447
7.1. Einführung	447
7.2. Berechnung von Wärmeübertragungsproblemen	447

7.2.1. Klassische Wärmeübertragungsgleichungen	447
7.2.2. Inkrementelle Schritt-für-Schritt-Gleichungen	451
7.2.3. Finite-Elemente-Diskretisierung von Wärmeübertragungsgleichungen	453
7.3. Berechnung von Feldproblemen	459
7.3.1. Sickerströmung	460
7.3.2. Inkompressible, reibungsfreie Strömung	461
7.3.3. Torsion	463
7.4. Berechnung von Strömungen zäher, inkompressibler Flüssigkeiten .	465
7.4.1. Geschwindigkeits-Druck-Formulierung	467
7.4.2. Formulierung nach dem Strafverfahren	469
Literatur	471

**Teil III: Lösung von Gleichgewichtsbedingungen
und Bewegungsgleichungen**

8. Lösung der Gleichgewichtsbedingungen in statischen Berechnungen . .	475
8.1. Einführung	475
8.2. Direkte Lösungen mit Algorithmen, die auf der Gaußschen Elimination beruhen	477
8.2.1. Einführung in die Gaußsche Elimination	477
8.2.2. Lösung mit der Gaußschen Elimination	482
8.2.3. Rechnerimplementierung der Gaußschen Elimination – Die aktive Spaltenlösung	485
8.2.4. Faktorenzerlegung nach Cholesky, statische Kondensation, Substrukturen und frontale Lösung	493
8.2.5. Lösung von Gleichungen mit symmetrischen, nicht positiv definiten Koeffizientenmatrizen	503
8.3. Direkte Lösung mit orthogonalen Matrizen	516
8.3.1. Faktorenzerlegung nach Givens	517
8.3.2. Faktorenzerlegung nach Householder	521
8.4. Gauß-Seidel-Iteration	524
8.5. Lösungsfehler	527
8.6. Lösungen von nichtlinearen Gleichungen	536
8.6.1. Newton-Raphsonsche Schemen	537
8.6.2. Broyden-Fletscher-Goldfarb-Shannosche oder BFGS-Methode	539
8.6.3. Konvergenzkriterien	542
Literatur	543
9. Lösung der Bewegungsgleichungen in kinetischen Berechnungen	547
9.1. Einführung	547
9.2. Direkte Integrationsmethoden	548
9.2.1. Die zentrale Differenzenmethode	549

9.2.2. Die Houboltsche Methode	554
9.2.3. Die Wilsonsche Θ -Methode	557
9.2.4. Die Newmarksche Methode	561
9.2.5. Verknüpfung von verschiedenen Integrationsoperatoren	563
9.3. Modenüberlagerung	565
9.3.1. Modale generalisierte Verschiebungen als neue Basis	566
9.3.2. Berechnungen ohne Berücksichtigung der Dämpfung	569
9.3.3. Berücksichtigung von Dämpfung	578
9.4. Analyse von direkten Integrationsverfahren	583
9.4.1. Näherung für die direkte Integration und Lastoperatoren	585
9.4.2. Stabilitätsanalyse	589
9.4.3. Analyse der Genauigkeit	593
9.4.4. Einige praktische Überlegungen	596
9.5. Lösung nichtlinearer Gleichungen in kinetischen Berechnungen	600
9.5.1. Explizite Integration	600
9.5.2. Implizite Integration	601
9.5.3. Lösung mit Modenüberlagerung	605
9.6. Lösung von anderen als Strukturproblemen	606
Literatur	608
10. Vorbemerkungen zur Lösung von Eigenproblemen	611
10.1. Einleitung	611
10.2. Grundlagen für die Lösung von Eigensystemen	614
10.2.1. Eigenschaften der Eigenvektoren	614
10.2.2. Die charakteristischen Polynome des Eigenproblems $\mathbf{K}\boldsymbol{\phi} = \lambda\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}$ und seiner zugeordneten Zwangsprobleme	619
10.2.3. Verschiebung (Shifting)	625
10.2.4. Folgen des Verschwindens von Massen	627
10.2.5. Transformation des verallgemeinerten Eigenproblems $\mathbf{K}\boldsymbol{\phi} = \lambda\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}$ auf eine Standardform	628
10.3. Näherungslösungsverfahren	634
10.3.1. Statische Kondensation	635
10.3.2. Rayleigh-Ritzsches Verfahren	642
10.3.3. Synthese von Komponentenmoden	651
10.3.4. Lanczosche Methode	654
10.4. Lösungsfehler	657
Literatur	663
11. Lösungsverfahren für Eigenprobleme	665
11.1. Einführung	665
11.2. Vektor-Iterationsverfahren	667
11.2.1. Inverse Iteration	668
11.2.2. Vorwärtsiteration	675
11.2.3. Verschiebung in der Vektoriteration	678
11.2.4. Iteration mit Verschiebung um den Rayleighschen Quotienten	683

11.2.5. Matrixeinschränkung oder -deflation und Gram-Schmidtsche Orthogonalisierung	686
11.2.6. Einige praktische Überlegungen zur Vektoriteration . . .	689
11.3. Transformationsverfahren	691
11.3.1. Die Jacobische Methode	692
11.3.2. Die verallgemeinerte Jacobische Methode	699
11.3.3. Die inverse Householdersche QR-Iterationslösung . . .	707
11.4. Polynom-Iterationsverfahren	719
11.4.1. Explizite Polynom-Iteration	720
11.4.2. Implizite Polynom-Iteration	721
11.5. Verfahren, die auf der Eigenschaft der Sturmschen Folge beruhen	724
Literatur	727
12. Lösung von großen Eigenproblemen	730
12.1. Einführung	730
12.2. Das Determinanten-Suchverfahren	731
12.2.1. Einleitende Betrachtungen	732
12.2.2. Der Lösungsalgorithmus	733
12.2.3. Einige Bemerkungen zur Implementierung des Determinanten-Suchverfahrens	736
12.3. Die Unterraum-Iterationsmethode	738
12.3.1. Vorbereitende Betrachtungen	740
12.3.2. Unterraum-Iteration	743
12.3.3. Start-Iterationsvektoren	746
12.3.4. Konvergenz	749
12.3.5. Implementierung der Unterraum-Iterationsmethode . .	751
12.3.6. Einige Bemerkungen zur Unterraum-Iterationsmethode .	762
Literatur	763
Anhang: Implementierung der Finite-Elemente-Methode	765
A.1. Einführung	765
A.2. Organisation eines Computerprogramms zur Berechnung von Strukturmatrizen	767
A.2.1. Einlesen von Knotenpunkt- und Element-Informationen .	767
A.2.2. Berechnung von Element-Steifigkeits- und Element- Massenmatrizen sowie äquivalenten Knotenlasten . . .	770
A.2.3. Gruppierung von Strukturmatrizen	770
A.3. Berechnung der Element-Spannungen	775
A.4. Das Programm STAP als ein Beispiel	775
A.4.1. Dateneingabe für das Computerprogramm STAP	777
A.4.2. Ausdruck des Programms STAP	783
Literatur	797
Sachverzeichnis	799