

Inhaltsverzeichnis Teil II

10	Vektorrechnung und Feldlehre	203
	Prof. Dr.-Ing. Hans-D. LANDSCHULZ, FH Wiesbaden	
10.1	Vektoralgebra	203
10.1.1	Vektorbegriff	203
10.1.2	Gleichheit, Addition, Subtraktion	204
10.1.3	Multiplikation von Vektor mit Skalar	205
10.1.4	Komponentendarstellung	205
10.1.5	Skalarprodukt	207
10.1.6	Vektorprodukt	209
10.1.7	Spatprodukt	209
10.1.8	Mehrfachprodukte	210
10.2	Vektoranalysis	210
10.2.1	Differentiation eines Vektors nach einem Skalar	210
10.2.2	Feldbegriff	211
10.2.3	Einführung von Kurven- und Oberflächenintegral	212
10.2.4	Gradient eines skalaren Feldes	213
10.2.5	Divergenz	214
10.2.6	Rotation	215
10.2.7	Laplace-Operator	216
10.2.8	Vektorielle Differentiation zusammengesetzter Ausdrücke	217
10.2.9	Integralsätze	218
10.3	Vektorfeldbestimmung aus Quellen und Wirbeln	218
10.3.1	Wirbelfreies Feld	218

10.3.2	Quellenfreies Feld	219
10.3.3	Zerlegungssatz	219
10.4	Schrifttum	220
11	Funktionentheorie	221
	Prof. Dr.-Ing. Hans-D. LANDSCHULZ, FH Wiesbaden	
11.1	Grundlegende Begriffe	221
11.2	Stetigkeit	222
11.3	Differentiation	223
11.3.1	Differenzierbarkeit	223
11.3.2	Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen	223
11.3.3	Holomorphe Funktionen	223
11.4	Integration im Komplexen	224
11.4.1	Einführung	224
11.4.2	Wegunabhängigkeit	225
11.4.3	Unbestimmtes Integral	225
11.4.4	Cauchyscher Integralsatz (Hauptsatz der Funktionentheorie)	225
11.4.5	Cauchysche Integralformeln	226
11.5	Potenzreihen	226
11.5.1	Allgemeine Form	226
11.5.2	Konvergenz, Divergenz	227
11.5.3	Eigenschaften	227
11.5.4	Taylorreihenentwicklung	228
11.6	Analytische Fortsetzung	229
11.7	Laurentreihen	230
11.8	Singularitäten	231
11.8.1	Definition	231
11.8.2	Klassifizierung	231
11.8.2.1	Hebbare Singularität	231
11.8.2.2	Pol n-ter Ordnung	232
11.8.2.3	Wesentliche Singularität	232
11.9	Verhalten im Unendlichen	232
11.10	Residuen	233
11.10.1	Definition	233
11.10.2	Residuenberechnung	233
11.10.3	Residuensatz	234
11.10.4	Anwendungen	234
11.10.4.1	Komplexe Umkehrformel der Laplace-Transformation	235
11.10.4.2	Inverse \mathcal{L} -Transformation	236
11.10.4.3	Berechnung uneigentlicher reeller Integrale	236
11.10.4.4	Berechnung des Cauchyschen Hauptwertes	236
11.11	Weiterführende Verweise	237
11.11.1	Konforme Abbildung	237
11.11.2	Riemannsche Flächen, Verzweigungsschnitte	237
11.12	Schrifttum	237
12	Gewöhnliche Differentialgleichungen	239
	Prof. Dr.-Ing. Franz PELZ †	
12.1	Vorbemerkungen	239
12.2	Allgemeines	240

12.2.1	Zerfallende Differentialgleichung	240
12.2.2	$F(x, y^{(m)}, y^{(m+1)}, \dots, y^{(m+v)}) = 0$	240
12.2.3	$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$	240
12.2.4	Einführung neuer Veränderlicher	240
12.2.5	Homogene Differentialgleichungen	241
12.2.6	Gleichgradige Differentialgleichungen	241
12.2.7	Übergang zur Umkehrfunktion $x(y)$	242
12.2.8	Integration durch Differentiation	242
12.3	Differentialgleichungen erster Ordnung	242
12.3.1	Allgemeines	242
12.3.2	Elementar lösbare Typen	243
12.4	Differentialgleichungen zweiter Ordnung	246
12.4.1	Singuläre Lösungen	246
12.4.2	Elementar lösbare Typen	247
12.5	Lineare Differentialgleichungen	248
12.5.1	Lineare homogene Differentialgleichungen	248
12.5.1.1	In geschlossener Form lösbare Typen	249
12.5.1.2	Reihenentwicklungen	250
12.5.2	Lineare inhomogene Differentialgleichungen	252
12.5.2.1	Variation der Konstanten (nach LAGRANGE)	252
12.5.2.2	Ansatzmethode für Dgln mit konstanten Koeffizienten	253
12.6	Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen	254
12.6.1	Allgemeine Systeme	254
12.6.2	Lineare Systeme	255
12.6.2.1	Lineare homogene Systeme mit konstanten Koeffizienten	255
12.6.2.2	Lineare inhomogene Systeme	256
12.7	Literatur	256
13	Partielle Differentialgleichungen	259
	Prof. Dr.-Ing. Franz PELZ †	
13.1	Vorbemerkungen	259
13.2	Quasilineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung für $z = f(x, y)$	259
13.3	Die linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für $u(x, y)$	262
13.3.1	Die drei Grundtypen und ihre Normalformen	262
13.3.2	Die hyperbolischen partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung	263
13.3.2.1	Lösung der Wellengleichung nach d'ALEMBERT	264
13.3.2.2	Lösung der Wellengleichung nach BERNOULLI	266
13.3.3	Die parabolische partielle Differentialgleichung 2. Ordnung	268
13.3.3.1	Lösung durch Überlagerung von Partikularlösungen	268
13.3.3.2	Lösung mit Hilfe der Laplace-Transformation	270
13.3.4	Die elliptischen partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung	271
13.3.4.1	Berechnung mit Hilfe von partikularen Lösungen	272
13.3.4.2	Lösung des ersten Randwertproblems mit Hilfe der Funktionentheorie	274
13.4	Literatur	276

14	Zylinderfunktionen	277
	Prof. Dr.-Ing. Franz PELZ †	
14.1	Einleitung	277
14.1.1	Funktionsregister	277
14.1.2	Die Besselsche Differentialgleichung und ihre modifi- zierte Form	277
14.2	Die Definition besonderer Zylinderfunktionen und ihre Darstellung durch Potenzreihen	278
14.2.1	Die Besselsche Funktion $J_p(z)$	278
14.2.2	Die Neumannsche Funktion $N_p(z)$	279
14.2.3	Die Hankelschen Funktionen $H_p^{(1)}(z)$ und $H_p^{(2)}(z)$	281
14.3	Besondere modifizierte Zylinderfunktionen	281
14.3.1	Die modifizierte Besselsche Funktion $I_p(z)$	281
14.3.2	Die modifizierte Hankelsche Funktion $H_p(z) =$ $(2/\pi) K_p(z)$	283
14.4	Die Thomsonschen Funktionen ber, bei und ähnliche	283
14.5	Die allgemeine Lösung der Besselschen Differentialglei- chung und ihrer modifizierten Form	285
14.5.1	Gebäuchliche Ansätze bei der Besselschen Differential- gleichung	285
14.5.2	Ansätze für die modifizierte Besselsche Differentialglei- chung	286
14.6	Asymptotische Formeln für große Argumente	286
14.6.1	Formeln von HANKEL für $ z \gg 1$ und $ z \gg p $	286
14.6.2	Formeln von DEBYE für reelle $z = x \gg 1$ und beliebige $p > 0$	287
14.7	Zylinderfunktionen halbzahlicher Ordnungen	288
14.8	Zusammenstellung wichtiger Formeln	289
14.8.1	Formeln für Zylinderfunktionen Z_p	289
14.8.2	Formeln für modifizierte Zylinderfunktionen $Z_p^{(m)}$	290
14.9	Integraldarstellungen mit reeller Integrationsvariablen	291
14.9.1	Formeln für Zylinderfunktionen Z_p	291
14.9.2	Formeln für modifizierte Zylinderfunktionen $Z_p^{(m)}$	292
14.9.3	Besondere Formeln für die Ordnung $p = 0$	293
14.10	Fourier-Reihen für frequenzmodulierte Schwingungen und Exponentialkennlinien	293
14.10.1	Fourier-Reihen für frequenzmodulierte Schwingungen	293
14.10.2	Fourier-Reihen für Exponentialkennlinien	294
14.11	Orthogonale Besselsche Funktionen und Besselsche Reihe	294
14.12	Beispiel: Schwingungen einer kreisförmigen Membran	295
14.13	Literatur	296
15	Boolesche Algebra	297
	Prof. Dr.-Ing. Franz PELZ †	
15.1	Boolesche Verbände	297
15.1.1	Definition eines Booleschen Verbandes	297
15.1.2	Beispiele für Boolesche Verbände	298
15.1.2.1	Logische Aussagen	298
15.1.2.2	Bistabile Schalter	298

15.1.2.3	Mengen	298
15.1.2.4	Ereignisse	298
15.2	Sätze und Regeln der Booleschen Algebra	299
15.3	Boolesche Ausdrücke (Terme) oder Boolesche Funktionen	300
15.3.1	Funktionen einer Veränderlichen	300
15.3.2	Funktionen zweier Veränderlicher	300
15.3.2.1	Disjunktion (OR)	301
15.3.2.2	Konjunktion (AND)	301
15.3.2.3	Peirce- oder NICOD-Funktion (NOR)	301
15.3.2.4	Sheffer-Funktion (NAND)	301
15.3.2.5	Äquivalenz	301
15.3.2.6	Antivalenz (XOR)	301
15.3.2.7	Implikation	302
15.3.2.8	Inhibition	302
15.3.3	Funktionen von n Veränderlichen	302
15.3.3.1	Disjunktionen	302
15.3.3.2	Konjunktionen	302
15.3.4	Darstellung aller Funktionen allein durch NOR oder allein durch NAND	303
15.4	Normalformen und Entwicklungssätze	303
15.5	Beispiele für das Aufstellen, Umwandeln und Vereinfachen von Booleschen Funktionen	304
15.6	Literatur	308
16	Numerische Mathematik	309
	Dr.-Ing. H. KREMER, Darmstadt	
16.1	Numerische Berechnung elementarer und höherer transzendenter Funktionen	309
16.1.1	Elementare transzendente Funktionen	309
16.1.1.1	Quadratwurzel: \sqrt{x} , $0 \leq x < \infty$	309
16.1.1.2	n -te Wurzel $\sqrt[n]{x}$, $n > 0$, $0 \leq x < \infty$	309
16.1.1.3	Natürlicher Logarithmus: $\ln(x)$, $0 < x < \infty$	310
16.1.1.4	Exponentialfunktion: $\exp(x) =_{\text{def}} e^x$, $-\infty < x < \infty$	310
16.1.1.5	Sinus und Cosinus: $\sin(x)$, $\cos(x)$, $-\infty < x < \infty$	310
16.1.1.6	Tangens: $\tan(x)$, $-\infty < x < \infty$	311
16.1.1.7	Arcussinus, Arcuscosinus: $\text{Arcsin}(x)$, $\text{Arccos}(x)$, $-1 \leq x \leq 1$	311
16.1.1.8	Arcustangens: $\text{Arctan}(x)$, $-\infty < x < \infty$	312
16.1.2	Höhere transzendente Funktionen	312
16.1.2.1	Gamma-Funktion: $\Gamma(x)$, $-\infty < x < \infty$	312
16.1.2.2	Besselfunktionen: $J_n(x)$, $n \geq 0$, $x \geq 0$	313
16.1.2.3	Neumannfunktionen: $Y_n(x)$, $n \geq 0$, $x > 0$	314
16.1.2.4	Integralsinus: $\text{Si}(x)$, Integralcosinus: $\text{Ci}(x)$, $-\infty < x < \infty$	316
16.1.2.5	Gaußsches Fehlerintegral: $\text{erf}(x)$, $0 \leq x < \infty$	317
16.1.3	Literatur	317
16.2	Praktische Lösung linearer Gleichungssysteme	318
16.2.1	Wohlbestimmte Gleichungssysteme	318
16.2.2	Überbestimmte Gleichungssysteme	323

16.2.3	Literatur	326
16.3	Berechnung der Wurzeln nichtlinearer Gleichungen ..	326
16.3.1	Nichtlineare Gleichungen	326
16.3.1.1	Numerische Berechnung reeller Einfachwurzeln	326
16.3.1.2	Numerische Berechnung reeller Mehrfachwurzeln	328
16.3.1.3	Erzielbare Genauigkeit	329
16.3.1.4	Beispiel	329
16.3.2	Numerische Berechnung komplexer Wurzeln	330
16.3.3	Berechnung der Wurzeln nichtlinearer Gleichungssysteme	330
16.3.4	Berechnung von Polynomenwurzeln	332
16.3.5	Nichtlineare Optimierung	332
16.3.6	Literatur	332
16.4	Numerische Verfahren zur Approximation von Funktionen und Punktmenge	333
16.4.1	Grundbegriffe	333
16.4.2	Lokale Approximation von Funktionen	334
16.4.3	Globale Approximation von Funktionen nach dem Gaußschen Fehlerkriterium	336
16.4.4	Ausgleichsrechnung	338
16.4.5	Approximation durch Polynome	338
16.4.6	Spline-Approximation	339
16.4.7	Bézier-Approximation	341
16.4.8	Approximation frequenzbandbegrenzter Funktionen ..	342
16.4.9	Literatur	342
16.5	Numerische Quadratur	343
16.5.1	Integrand gegeben als äquidistante Punktmenge	343
16.5.2	Integrand formelmäßig gegeben	344
16.5.3	Ergänzende Bemerkungen	345
16.5.4	Literatur	346
16.6	Numerische Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen	346
16.6.1	Aufgabenstellung	346
16.6.2	Runge-Kutta-Verfahren	348
16.6.2.1	Klassisches RK 4-Schema	348
16.6.2.2	Runge-Kutta-Chai RKC 4-Schema	348
16.6.2.3	Runge-Kutta-Fehlberg-Algorithmus mit automatischer Schrittweitensteuerung	349
16.6.3	Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten	350
16.6.4	Literatur	351
16.7	Numerische Berechnung von Fourier- und Laplace-Transformationen	351
16.7.1	Fourier-Reihen	351
16.7.2	Fourier-Reihen mit endlicher Gliederzahl	352
16.7.3	Näherungsweise Berechnung von Fourier-Koeffizienten ..	354
16.7.4	Rekursive Berechnung trigonometrischer Summen ..	355
16.7.5	Diskrete Fourier-Transformation	356
16.7.6	Numerische Laplace-Rücktransformation	356
16.7.7	Literatur	357
16.8	Zufallszahlen	358

16.8.1	(0,1)-Gleichverteilung GV (0,1)	359
16.8.2	(a,b)-Gleichverteilung GV (a,b)	360
16.8.3	Normalverteilung oder Gaußverteilung NV (σ, μ)	360
16.8.4	Erzeugung von Zufallszahlenfolgen mit dem Digitalrechner	361
16.8.5	Literatur	362
17	Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung	363
	Prof. Dr.-Ing. E. HÄNSLER, Darmstadt	
17.1	Wahrscheinlichkeitsraum	363
17.1.1	Ergebnismenge	363
17.1.2	Ereignisfeld	363
17.1.3	Wahrscheinlichkeitsmaß	364
17.1.3.1	Axiomatische Definition	364
17.1.3.2	Klassischer Definitionsversuch	364
17.1.3.3	Definitionsversuch als Grenzwert der relativen Häufigkeit	365
17.2	Bedingte Wahrscheinlichkeit	365
17.2.1	Definition	365
17.2.2	Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit	365
17.2.3	Satz von BAYES	366
17.3	Zufallsvariablen	366
17.4	Wahrscheinlichkeitsverteilung	366
17.5	Wahrscheinlichkeitsdichte	367
17.6	Transformation einer Zufallsvariablen	368
17.6.1	Wahrscheinlichkeitsverteilung	368
17.6.2	Wahrscheinlichkeitsdichte	369
17.7	Erwartungswert, Momente	369
17.7.1	Definition des Erwartungswerts	369
17.7.2	Rechenregeln für Erwartungswerte	370
17.7.3	Momente einer reellwertigen Zufallsvariablen	370
17.7.4	Gemeinsames Moment zweier reellwertiger Zufallsvariablen	371
17.7.5	Charakteristische Funktion	371
17.7.6	Erzeugende Funktion	371
17.8	Konvergenz	372
17.8.1	Konvergenz mit Wahrscheinlichkeit Eins	372
17.8.2	Konvergenz im quadratischen Mittel	372
17.8.3	Konvergenz in Wahrscheinlichkeit	372
17.8.4	Konvergenz in der Wahrscheinlichkeitsverteilung	372
17.9	Grenzwertsätze und Ungleichungen	372
17.9.1	Ungleichung von TSCHEBYSCHEFF	372
17.9.2	Gesetz der großen Zahlen	373
17.9.3	Zentraler Grenzwertsatz	373
17.10	Einige spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen	374
17.10.1	Verteilungen stetiger Zufallsgrößen	374
17.10.1.1	Rechteck- oder Gleichverteilung	374
17.10.1.2	Normal- oder Gaußverteilung	374
17.10.1.3	Logarithmische Normalverteilung	376
17.10.1.4	Exponentialverteilung	377

17.10.1.5	Gammaverteilung	377
17.10.1.6	Betaverteilung	379
17.10.1.7	Cauchy-Verteilung	379
17.10.1.8	t - oder Student-Verteilung	379
17.10.1.9	χ^2 -Verteilung	380
17.10.1.10	Laplace-Verteilung	381
17.10.1.11	K_0 -Verteilung	381
17.10.1.12	Maxwell-Verteilung	382
17.10.1.13	Rayleigh-Verteilung	384
17.10.2	Verteilungen diskreter Zufallsgrößen	384
17.10.2.1	Binomialverteilung	384
17.10.2.2	Negative Binomialverteilung	385
17.10.2.3	Poisson-Verteilung	386
17.10.2.4	Geometrische Verteilung	386
17.11	Literatur	386
18	Zufallsprozesse	389
	Prof. Dr.-Ing. E. HÄNSLER, Darmstadt	
18.1	Definition	389
18.2	Wahrscheinlichkeitsverteilung und Wahrscheinlichkeitsdichte	389
18.2.1	Wahrscheinlichkeitsverteilung	390
18.2.2	Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung zweier Zufallsvariablen	390
18.2.3	Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung zweier Zufallsprozesse	390
18.2.4	Wahrscheinlichkeitsdichte	390
18.2.5	Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte zweier Zufallsvariablen	390
18.2.6	Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte zweier Zufallsprozesse	390
18.3	Erwartungswert, Momente	391
18.3.1	Linearer Mittelwert	391
18.3.2	Quadratischer Mittelwert	391
18.3.3	Varianz	391
18.3.4	Autokorrelationsfunktion	391
18.3.5	Autovarianzfunktion	391
18.3.6	Kreuzkorrelationsfunktion	391
18.3.7	Kreuzkovarianzfunktion	392
18.4	Stationarität	392
18.5	Ergodizität	393
18.6	Transformation der Autokorrelationsfunktion	394
18.6.1	Stationäre Zufallsprozesse	394
18.6.1.1	(Zeit-) Kontinuierlicher Zufallsprozeß	394
18.6.1.2	(Zeit-) Diskreter Zufallsprozeß	394
18.6.2	Instationäre Zufallsprozesse	394
18.6.2.1	(Zeit-) Kontinuierlicher Zufallsprozeß	395
18.6.2.2	(Zeit-) Diskreter Zufallsprozeß	395
18.7	Literatur	396

19	Distributionen	399
	Dr.-Ing. M. BOSSERT und Dipl.-Ing. Klaus HUBER, Darmstadt	
19.1	Einleitung	399
19.2	Definition der Distribution	399
19.3	Eigenschaften der Distributionen	400
19.3.1	Ableitung einer Distribution	400
19.3.2	Vergleich von Distributionen mit gewöhnlichen Funktionen	401
19.3.3	Translation (Verschiebung) einer Distribution	401
19.3.4	Summe zweier Distributionen	401
19.3.5	Multiplikation mit Distributionen	401
19.3.6	Ähnlichkeitssatz	402
19.3.6.1	Gerade Distributionen	402
19.3.6.2	Ungerade Distributionen	402
19.3.7	Faltung zweier Distributionen	402
19.3.8	Fouriertransformation von Distributionen	403
19.3.8.1	Parsevalsches Theorem	403
19.3.8.2	Vertauschungssatz	404
19.3.8.3	Verschiebungssatz	404
19.4	Einige spezielle Distributionen	404
19.4.1	Die δ -Funktion (Dirac-Impuls)	404
19.4.1.1	Darstellungen der δ -Funktion	405
19.4.1.2	Fouriertransformation der δ -Funktion	406
19.4.1.3	Ableitung der δ -Funktion	407
19.4.1.4	Faltung mit der δ -Funktion	407
19.4.1.5	Die δ -Funktion zur Beschreibung von Spektrallinien	407
19.4.2	Der Cauchysche Hauptwert (valor principalis)	408
19.4.3	Die Sprungfunktion $\sigma(t)$	408
19.4.3.1	Ableitung der Sprungfunktion	409
19.4.3.2	Fouriertransformation der Sprungfunktion	409
19.4.4	Die Signumfunktion $\operatorname{sgn} t$	410
19.4.4.1	Ableitung der Signumfunktion	411
19.4.4.2	Fouriertransformation der Signumfunktion	411
19.5	Anwendungsbeispiele	411
19.5.1	Die Raumladungsdichte einer Punktladung	411
19.5.2	Die Poissonsche Summationsformel	412
19.5.2.1	Anwendung der Poissonschen Summationsformel zur Summenberechnung	414
19.5.2.2	Herleitung des Abtasttheorems	414
19.6	Literaturverzeichnis	415