

## INHALT

---

EINLEITUNG DES HERAUSGEBERS . . . . . XIII

### PHILOSOPHIE DER ARITHMETIK

#### LOGISCHE UND PSYCHOLOGISCHE UNTERSUCHUNGEN

#### ERSTER BAND

VORREDE . . . . .	5
ERSTER TEIL: DIE EIGENTLICHEN BEGRIFFE VON VIELHEIT, EINHEIT UND ANZAHL	
EINLEITUNG . . . . .	10
I. KAPITEL: <i>Die Entstehung des Begriffes Vielheit vermittels desjenigen der kollektiven Verbindung</i> . . . . .	14
Die Analyse des Anzahlbegriffes setzt die des Vielheitsbegriffes voraus . . . . .	14
Die konkreten Grundlagen der Abstraktion . . . . .	15
Unabhängigkeit der Abstraktion von der Natur der kolligierten Inhalte . . . . .	16
Die Entstehung des Vielheitsbegriffes durch Reflexion auf die kollektive Verbindung . . . . .	17
II. KAPITEL: <i>Kritische Entwicklungen</i> . . . . .	22
Die kollektive Einigung und die Einigung der Teilphänomene im jeweiligen Gesamtbewußtsein . . . . .	22
Das kollektive Zusammen und das zeitliche Zugleich . . . . .	24
Kollektion und Sukzession . . . . .	25
Die kollektive und die räumliche Synthesis . . . . .	34
A. F. A. Langes Theorie . . . . .	34
B. Baumanns Theorie . . . . .	44
Kolligieren, Zählen und Unterscheiden . . . . .	48
Kritischer Zusatz . . . . .	60

III. KAPITEL: <i>Die psychologische Natur der kollektiven Verbindung</i> . . . . .	64
Rückblick . . . . .	64
Die Kollektion eine besondere Verbindungsart . . . . .	65
Zur Relationstheorie . . . . .	66
Psychologische Charakteristik der kollektiven Verbindung . . . . .	71
IV. KAPITEL: <i>Analyse des Anzahlbegriffes nach Ursprung und Inhalt</i> . . . . .	77
Vollendung der Analyse des Vielheitsbegriffes . . . . .	77
Der Begriff Etwas . . . . .	80
Die Anzahlen und der Gattungsbegriff der Anzahl . . . . .	81
Verhältnis der Begriffe Anzahl und Vielheit . . . . .	82
Eins und Etwas . . . . .	84
Kritischer Zusatz . . . . .	85
V. KAPITEL: <i>Die Relationen Mehr und Weniger</i> . . . . .	90
Der psychologische Ursprung dieser Relationen . . . . .	91
Vergleichung von beliebigen Vielheiten sowie von Zahlen nach Mehr und Weniger . . . . .	93
Die Sonderung der Zahlenspezies bedingt durch die Erkenntnis von Mehr und Weniger . . . . .	95
VI. KAPITEL: <i>Die Definition der Gleichzahligkeit durch den Begriff der gegenseitig-eindeutigen Zuordnung</i> . . . . .	96
Leibniz Definition des allgemeinen Gleichheitsbegriffes . . . . .	96
Die Definition der Gleichzahligkeit . . . . .	98
Über spezielle Gleichheitsdefinitionen . . . . .	100
Anwendung auf die Gleichheit beliebiger Vielheiten . . . . .	101
Vergleichung von Vielheiten einer Gattung . . . . .	103
Vergleichung von Vielheiten in Beziehung auf ihre Zahlen . . . . .	103
Der wahre Sinn der behandelten Gleichheitsdefinition . . . . .	105
Gegenseitige Zuordnung und kollektive Verbindung . . . . .	106
Unabhängigkeit der Gleichzahligkeit vom Verknüpfungsmodus . . . . .	109
VII. KAPITEL: <i>Die Zahlendefinition durch Äquivalenz</i> . . . . .	111
Aufbau der Äquivalenztheorie . . . . .	111
Belege . . . . .	114
Kritik . . . . .	115
Freges Versuch . . . . .	118
Kerrys Versuch . . . . .	123
Schlußbemerkung . . . . .	125
VIII. KAPITEL: <i>Diskussionen über Einheit und Vielheit</i> . . . . .	126
Die Definition der Zahl als Vielheit von Einheiten. Eins als abstrakter, positiver Teilinhalt. Eins als bloßes Zeichen . . . . .	126

Eins und Null als Zahlen . . . . .	129
Der Begriff der Einheit und der Begriff der Zahl Eins . . . . .	134
Weitere Unterscheidungen betreffend Eins und Einheit . . . . .	135
Gleichheit und Verschiedenheit der Einheiten . . . . .	139
Weitere Mißverständnisse . . . . .	149
Die Äquivokationen des Namens Einheit . . . . .	152
Die Willkürlichkeit der Unterscheidung zwischen Einheit und Vielheit. Die Auffassung der Vielheit als einer Vielheit, als einer gezählten Einheit, als eines Ganzen . . . . .	155
Herbartsche Argumentationen . . . . .	157
IX. KAPITEL <i>Der Sinn der Zahlenaussage</i> . . . . .	161
Widerstreit der Ansichten . . . . .	161
Widerlegung und Entscheidung . . . . .	162
ANHANG ZUM ERSTEN TEILE: Die nominalistischen Versuche von Helmholtz und Kronecker . . . . .	170
ZWEITER TEIL: DIE SYMBOLISCHEN ANZAHLBEGRIFFE UND DIE LOGISCHEN QUELLEN DER ANZAHLN-ARITHMETIK	
X. KAPITEL: <i>Die Zahloperationen und die eigentlichen Zahlbegriffe</i> . . . . .	181
Die Zahlen in der Arithmetik sind keine Abstrakta . . . . .	181
Die Grundbetätigungen an Zahlen . . . . .	182
Die Addition . . . . .	183
Die Teilung . . . . .	188
Die Arithmetik operiert nicht mit den „eigentlichen“ Zahlbegriffen . . . . .	190
XI. KAPITEL: <i>Die symbolischen Vielheitsvorstellungen</i> . . . . .	193
Eigentliche und symbolische Vorstellungen . . . . .	193
Die sinnlichen Mengen. . . . .	195
Versuche zur Erklärung momentaner Mengenauffassungen . . . . .	196
Symbolisierungen durch Vermittlung des vollen Prozesses der Einzelauffassung . . . . .	198
Neue Versuche zur Erklärung momentaner Mengenauffassungen . . . . .	199
Hypothesen . . . . .	201
Die figuralen Momente . . . . .	203
Entscheidung . . . . .	210
Die psychologische Funktion der Fixierung einzelner Mengenglieder . . . . .	212
Worin liegt die Gewähr für die Vollständigkeit der durchlaufenden Einzelauffassung einer Menge? . . . . .	214

Auffassung eigentlich vorstellbarer Mengen durch figurale Momente . . . . .	216
Die elementaren Vielheitsoperationen und -relationen in Übertragung auf symbolisch vorgestellte Vielheiten . . . . .	217
Unendliche Mengen . . . . .	218
<b>XII. KAPITEL: <i>Die symbolischen Zahlvorstellungen</i></b> . . . . .	<b>222</b>
Die symbolischen Zahlbegriffe und ihre unendliche Mannigfaltigkeit . . . . .	222
Die systemlosen Zahlsymbolisierungen . . . . .	224
Die natürliche Zahlenreihe . . . . .	226
Das Zahlensystem . . . . .	228
Verhältnis des Zahlensystems zur natürlichen Zahlenreihe . .	233
Die Wahl der Grundzahl des Systems . . . . .	235
Die Systematik der Zahlbegriffe und die Systematik der Zahlzeichen . . . . .	237
Das sinnlich-symbolische Zählungsverfahren . . . . .	239
Erweiterung des Gebietes symbolischer Zahlen durch die sinnliche Symbolisierung . . . . .	240
Die Unterschiede der sinnlichen Bezeichnungsmittel . . . . .	243
Die natürliche Entstehung des Zahlensystems . . . . .	244
Zahlenschätzungen durch figurale Momente . . . . .	252
<b>XIII. KAPITEL: <i>Die logischen Quellen der Arithmetik</i></b> . . . . .	<b>256</b>
Rechnen, Rechenkunst und Arithmetik . . . . .	256
Die arithmetischen Rechenmethoden und die Zahlbegriffe . .	259
Die systematischen Zahlen als Vertreter der Zahlen an sich . .	260
Die symbolischen Zahlbildungen außerhalb des Systems als arithmetische Probleme . . . . .	260
Die erste Grundaufgabe der Arithmetik . . . . .	262
Die elementaren arithmetischen Operationen . . . . .	262
Die Addition . . . . .	264
Die Multiplikation . . . . .	268
Subtraktion und Division . . . . .	269
Rechenmethoden mit Abakus und in Kolumnen. Die natürliche Entstehung des indischen Ziffernrechnens . . . . .	272
Einfluß der Bezeichnungsmittel auf die Gestaltung der Rechenmethoden . . . . .	274
Die höheren Operationen . . . . .	276
Operationsmischungen. . . . .	278
Indirekte Zahlencharakterisierung durch Gleichungen . . . .	281
Ergebnis. Die logischen Quellen der allgemeinen Arithmetik .	282
<b>ERGÄNZENDE TEXTE (1890–1901)</b>	
<b>BEILAGE: Zur <i>Philosophie der Arithmetik</i>. Selbstanzeige</b> . . . . .	<b>287</b>

A. URSPRÜNGLICHE FASSUNG DES TEXTES BIS KAPITEL IV:	
ÜBER DEN BEGRIFF DER ZAHL. PSYCHOLOGISCHE ANALYSEN . . .	289
EINLEITUNG . . . . .	289
ERSTES KAPITEL: <i>Die Analyse des Begriffes der Anzahl nach Ursprung und Inhalt</i> . . . . .	296
§ 1. Die Entstehung des Begriffes der Vielheit vermittelt desjenigen der kollektiven Verbindung . . . . .	296
§ 2. Kritische Entwicklung einiger Theorien . . . . .	302
§ 3. Feststellung der psychologischen Natur der kollektiven Verbindung . . . . .	327
§ 4. Analyse des Zahlbegriffs nach Ursprung und Inhalt . . .	334
BEILAGE: Zu <i>Über den Begriff der Zahl</i> . Thesen . . . . .	339
B. ABHANDLUNGEN	
I. ABHANDLUNG: <i>Zur Logik der Zeichen (Semiotik)</i> . . . . .	340
II. ABHANDLUNG: <i>&lt;Begriff der allgemeinen Arithmetik&gt;</i> . . . . .	374
III. ABHANDLUNG: <i>&lt;Die Arithmetik als apriorische Wissenschaft&gt;</i> . . . . .	380
IV. ABHANDLUNG: <i>&lt;Zur Lehre vom Inbegriff&gt;</i> . . . . .	385
<I. Die Bestimmung des Inbegriffes> . . . . .	385
<II. > Vergleichung von Anzahlen . . . . .	390
<III. Anmerkungen> . . . . .	393
<1. zu S. 392:> Identität und Gleichheit . . . . .	393
<2. Zur Definition der Zahl> . . . . .	394
<IV. > Die Klassifikation der Anzahlen . . . . .	394
<V. > Anmerkung . . . . .	399
<VI. > Zur Korrektur . . . . .	400
<VII. Beilagen> . . . . .	404
<1. Beilage zu S. 395> . . . . .	404
<2. Beilage zu S. 402> . . . . .	404
V. ABHANDLUNG: <i>&lt;Zum Begriff der Operation&gt;</i> . . . . .	408
<I. > Arithmetische Zahlbestimmungen . . . . .	408
<II. > Verknüpfungen (bzw. Operationen). . . . .	420
<1. > Einteilung . . . . .	420
<2. Zum Begriff der Verknüpfung> . . . . .	422
<III. Beilage> . . . . .	427
Zum Begriff der Grundoperation . . . . .	427
VI. ABHANDLUNG: <i>&lt;Das Imaginäre in der Mathematik&gt;</i> . . . . .	430
<I. Zu einem Vortrag in der mathematischen Gesellschaft in Göttingen 1901> . . . . .	430

<1. Einleitung> . . . . .	430
<2. Theorien über das Imaginäre> . . . . .	434
<3. Der Durchgang durch das Imaginäre> . . . . .	440
<II. Beilagen> . . . . .	444
<1. Beilage: Notizen über einen Vortrag von Hilbert> . . . . .	444
<2. Beilage: Auszüge Husserls aus einem Briefwechsel zwischen Hilbert und Frege> . . . . .	447
VII. ABHANDLUNG: <Drei Studien zur Definitheit und Erweiterung eines Axiomensystems> . . . . .	452
<I. Studie>. . . . .	452
<II. Studie> . . . . .	458
<III. Studie> . . . . .	463
VIII. ABHANDLUNG: <Das Gebiet eines Axiomensystems   Axiomensystem – Operationssystem> . . . . .	470
<I.> Gebiet, Feststellung, was unter Gebiet eines Axiomensystems verstanden werden soll . . . . .	470
<II.> Zahlensystem . . . . .	474
<III. Arithmetisierbarkeit einer Mannigfaltigkeit> . . . . .	475
<IV. Zum Begriff eines Operationssystems> . . . . .	479
IX. ABHANDLUNG: Die Frage der Aufklärung des Begriffes der „natürlichen“ Zahlen, als „gebener“, „individuell bestimmter“ . . . . .	489
X. ABHANDLUNG: <Zur formalen Bestimmung einer Mannigfaltigkeit> . . . . .	493

## TEXTKRITISCHER ANHANG

ZUR TEXTGESTALTUNG DES BANDES . . . . .	503
TEXTKRITISCHE ANMERKUNGEN ZUM HAUPTTEXT . . . . .	509
Vorbemerkung. . . . .	509
Zur Textgestaltung. . . . .	510
Textkritische Anmerkungen . . . . .	510
TEXTKRITISCHE ANMERKUNGEN ZU DEN ERGÄNZENDEN TEXTEN . . . . .	520
A. ZUR URSPRÜNGLICHEN FASSUNG DES TEXTES BIS KAPITEL IV	
Vorbemerkung. . . . .	520
Zur Textgestaltung. . . . .	520
a) Textkritische Anmerkungen zu <i>Über den Begriff der Zahl</i> (Habilitationsschrift) . . . . .	522
b) Textkritische Anmerkungen zur Beilage <i>Thesen</i> . . . . .	523

## B. ZU DEN ABHANDLUNGEN

1)	<i>Zu den Abhandlungen I und II</i> . . . . .	523
	Vorbemerkung. . . . .	523
	Zur Textgestaltung. . . . .	524
	a) Textkritische Anmerkungen zu Abhandlung I: <i>Zur Logik der Zeichen (Semiotik)</i> . . . . .	524
	b) Textkritische Anmerkungen zu Abhandlung II: <i>«Begriff der allgemeinen Arithmetik»</i> . . . . .	530
2)	<i>Zu den Abhandlungen III und IV</i> . . . . .	530
	Vorbemerkung. . . . .	530
	Zur Textgestaltung. . . . .	532
	a) Textkritische Anmerkungen zu Abhandlung III: <i>«Die Arithmetik als apriorische Wissenschaft»</i> . . . . .	533
	b) Textkritische Anmerkungen zu Abhandlung IV: <i>«Zur Lehre vom Inbegriff»</i> . . . . .	534
3)	<i>Zur Abhandlung V «Zum Begriff der Operation»</i> . . . . .	538
	Vorbemerkung. . . . .	538
	Zur Textgestaltung. . . . .	539
	Textkritische Anmerkungen . . . . .	539
4)	<i>Zu den Abhandlungen VI–X.</i> . . . . .	546
	Vorbemerkung. . . . .	546
	Zur Textgestaltung. . . . .	548
	a) Textkritische Anmerkungen zu Abhandlung VI: <i>«Das Imaginäre in der Mathematik»</i> . . . . .	551
	α) Zur Beilage 1). . . . .	554
	β) Zur Beilage 2). . . . .	554
	b) Textkritische Anmerkungen zu Abhandlung VII: <i>«Drei Studien zur Definitheit und Erweiterung eines Axiomensystems»</i> . . . . .	557
	α) Zu «Studie I» . . . . .	557
	β) Zu «Studie II». . . . .	557
	γ) Zu «Studie III» . . . . .	558
	c) Textkritische Anmerkungen zu Abhandlung VIII: <i>«Das Gebiet eines Axiomensystems/Axiomensystem – Operationssystem»</i> . . . . .	559
	d) Textkritische Anmerkungen zu Abhandlung IX: <i>Die Frage der Aufklärung des Begriffes der „natürlichen“ Zahlen, als „gegebenen“, „individuell bestimmter“</i> . . . . .	561
	e) Textkritische Anmerkungen zu Abhandlung X: <i>«Zur formalen Bestimmung einer Mannigfaltigkeit».</i> . . . . .	562
	NACHWEIS DER ORIGINALSEITEN . . . . .	563
	LITERATURVERZEICHNIS . . . . .	578
	NAMENREGISTER . . . . .	584