

I

- 1 Der Satz ist vollkommen logisch analysiert, dessen Grammatik vollkommen klargelegt ist — in welcher Ausdrucksweise immer. Möglich und nötig ist, das Wesentliche unserer Sprache vom Unwesentlichen zu sondern — was auf die Konstruktion einer phänomenologischen Sprache hinauskommt. Phänomenologie als Grammatik derjenigen Tatsachen, auf denen die Physik ihre Theorien aufbaut. 51
- 2 Die Kompliziertheit der Philosophie ist nicht die ihrer Materie, sondern die unseres verknoteten Verstandes. 52
- 3 Wie seltsam, wenn sich die Logik mit einer ›idealen‹ Sprache befaßt, und nicht mit *unserer*! 52
- 4 Könnte ich den Zweck der grammatischen Konventionen dadurch beschreiben, daß ich sagte, ich müßte sie machen, weil etwa die Farben gewisse Eigenschaften haben — so wären damit diese Konventionen überflüssig, denn dann könnte ich eben das sagen, was die Konventionen gerade ausschließen. 53
- 5 Könnte man sagen: Das Kind muß das Sprechen einer bestimmten Sprache zwar lernen, aber nicht das Denken? 53
- 6 Der Gebrauch der Sprache ist in einem gewissen Sinne nicht zu lehren. 54
- 7 Die Konventionen der Grammatik lassen sich nicht durch eine Beschreibung des Dargestellten rechtfertigen: jede solche Beschreibung setzt schon die Regeln der Grammatik voraus. 54
- 8 Die Art der Vereinbarung, auf der die Funktion der Sprache

beruht, wäre etwa: ›Wenn du einen Schuß hörst, oder mich winken siehst, laufe davon.« 55

9 Haben die Philosophen bisher immer Unsinn geredet? 55

II

10 Die Auffassung der Sätze als Vorschriften, um Modelle zu bilden. Damit das Wort meine Hand lenken kann, muß es die Mannigfaltigkeit der gewünschten Tätigkeit haben. Die erklärt auch das Wesen des negativen Satzes. 57

11 Wie kann ich wissen, daß ich Rot erkennen kann, wenn ich es sehe? Wie weiß ich dann, daß es die Farbe ist, die ich gemeint habe? 57

12 Wenn die Vorstellung der Farbe nicht identisch ist mit der wirklich gesehenen Farbe, wie kann ein Vergleich vor sich gehen? 58

13 Die Sprache hat die Mannigfaltigkeit eines Stellwerks, was die Handlungen veranlaßt, die ihren Sätzen entsprechen. 58

14 Erst die Anwendung macht den Stab zum Hebel. — Jede Vorschrift kann als Beschreibung, jede Beschreibung als Vorschrift aufgefaßt werden. 59

15 Was heißt es, einen Satz als ein Glied eines Systems von Sätzen zu verstehen? Seine Komplikation erklärt sich nur durch den beabsichtigten Gebrauch. 59

16 Wie weiß ich, daß ich *das* erwartet habe? Wie weiß ich, daß die Farbe, die ich nun ›weiß‹ nenne, dieselbe ist wie die, die ich gestern hier gesehen habe? Dadurch, daß ich sie wiedererkenne. 59

17 Soll sich die Logik darum kümmern, ob der Satz bloß auto-

matisch oder gründlich gedacht war? Sie interessiert sich für ihn als Teil eines Sprachsystems. 60

18 Ich glaube nicht, daß die Logik in einem anderen Sinne von Sätzen reden kann, als wir, wenn wir sagen, ›hier steht ein Satz aufgeschrieben‹. 61

19 Übereinstimmung von Satz und Wirklichkeit. Man kann das Wiedererkennen, wie das Gedächtnis, auf zwei verschiedene Weisen auffassen: als Quelle des Begriffs der Vergangenheit und Gleichheit, oder als Kontrolle dessen, was vergangen ist und der Gleichheit. 61

III

20 Wenn man das Element der Intention aus der Sprache entfernt, so bricht ihre ganze Funktion zusammen. 63

21 Der wesentliche Unterschied der Bild-Auffassung (der Intention) von der Auffassung Russells, ist, daß jene das Wiedererkennen als das Erkennen einer internen Relation sieht. Die Kausalität zwischen Sprache und Handlung ist eine externe Relation. 63

22 Russells Theorie käme auf folgendes hinaus: Wenn ich jemandem einen Befehl gebe und, was er darauf tut, mir Freude macht, so hat er den Befehl ausgeführt. 64

23 Wenn beim Lernen der Sprache gleichsam die Verbindungen zwischen Sprache und Handlungen hergestellt werden, können diese Verbindungen vielleicht reißen? Wenn ja, welches Mittel habe ich, die ursprüngliche Abmachung mit der späteren Handlung zu *vergleichen*? 64

24 Die Intention drückt sich schon jetzt darin aus, wie ich das Bild *jetzt* mit der Wirklichkeit vergleiche. 65

25 Die Erwartung, daß p der Fall sein wird, muß das gleiche sein, wie die Erwartung der Erfüllung dieser Erwartung. 65

26 Wenn es nur die äußere Verbindung gäbe, so ließe sich gar keine Verbindung beschreiben, denn wir beschreiben die äußere Verbindung nur mit Hilfe der innern. 66

27 Der Sinn einer Frage ist die Methode ihrer Beantwortung. Sage mir, *wie* du suchst, und ich werde dir sagen, *was* du suchst. 66

28 Die Erwartung hängt mit dem Suchen zusammen. Ich weiß, wonach ich suche, ohne daß dieses wirklich existieren muß. Das Ereignis, welches die Erwartung ersetzt, das ist ihre Antwort. Das heißt ja, daß die Erwartung im gleichen Raum sein muß wie das Erwartete. 67

29 Die Erwartung ist nicht *extern* durch die Angabe des Erwarteten beschrieben; die Beschreibung durch das, was sie erwartet, ist eine interne. 68

30 Wenn ich sage ›das ist dasselbe Ereignis, welches ich erwartet habe‹ und ›das ist dasselbe Ereignis, was auch an jenem Ort stattgefunden hat‹, so bedeutet ›dasselbe‹ jedesmal etwas anderes. 68

31 Sprache und Absicht. Wenn man sagt, ›das ist der Bremshebel, er funktioniert aber nicht‹, so spricht man von der Absicht. 69

32 Gedanken — oder auch: Erwartung, Wunsch etc. — nenne ich erst das, was einen artikulierten Ausdruck hat. 69

33 *Wie* man sucht, drückt irgendwie aus, was man erwartet. Die Erwartung bereitet einen Maßstab vor, womit das Ereignis gemessen wird. Wäre sie nicht mit der Realität verknüpft, so könnte man einen Unsinn erwarten. 70

34 Wenn ich sage, die Darstellung muß von meiner Welt handeln, so kann man nicht sagen ›weil ich sie sonst nicht verifizieren kann‹, sondern, weil sie sonst von vornherein keinen Sinn für mich hat. 71

35 Das Seltsame ist: wir wissen, daß es eine *Erwartung* ist. Und

das zeigt, daß die Erwartung unmittelbar mit der Wirklichkeit zusammenhängt. Wir müssen eine vergleichende Beschreibung von Erwartung und Gegenwart geben können. 71

36 Das, was ich seinerzeit ›Gegenstände‹ genannt habe, ist einfach das, wovon wir reden können, *was immer der Fall ist*. ›Ich erwarte drei Schläge an die Tür.‹ Wie, wenn ich antwortete, ›wie weißt du, daß es drei Schläge gibt?‹ 72

37 Ist der Mann, der jetzt nichts Rotes um sich sieht, in derselben Lage wie der, der unfähig ist, rot zu sehen? Wenn der eine sich rot vorstellt, so ist das kein *gesehenes* Rot. 73

38 Die Erinnerung und die Wirklichkeit müssen in *einem* Raum sein. Auch: Die Vorstellung und die Wirklichkeit sind in *einem* Raum. 73

IV

39 Wenn ich nur etwas Schwarzes sehe und sage, es ist nicht rot, wie weiß ich, daß ich nicht Unsinn rede — d. h., daß es rot sein kann, daß es rot gibt — wenn nicht rot eben ein anderer Teilstrich auf dem Maßstab ist, auf dem auch schwarz einer ist? 75

40 Wenn der Vergleich mit dem Maßstab stimmt, so muß mir das Wort ›blau‹ die Richtung angeben, in der ich von schwarz zu blau gelange. Wie drücken sich aber diese verschiedenen Richtungen in der Grammatik aus? 75

41 Der rot-grün Blinde hat ein anderes Farbensystem als der Normale. Heißt nun die Frage etwa: Kann der, der rot und grün nicht kennt, wirklich das sehen, was wir ›blau‹ und ›gelb‹ nennen? 76

42 Das Grau muß bereits im Raum von dunkler und heller vorgestellt sein. Der Maßstab muß schon angelegt sein: ich kann nicht *wählen* zwischen *innerem* Gehör und innerer Taubheit. 76

43 Einer Frage entspricht immer eine *Methode* des Findens. Man kann ein Bild nicht mit der Wirklichkeit vergleichen, wenn man es nicht als Maßstab an sie anlegen kann. 77

44 Wie ist eine ›formally certified proposition‹ möglich? Die Anwendung des Maßstabes setzt keine bestimmte Länge des zu messenden Objektes voraus. Ich kann daher messen lernen im allgemeinen. 78

45 Aber sind die *Worte* im selben Raum wie das Objekt, dessen Länge beschrieben wird? Nun, die Einheitsstrecke gehört zum Symbolismus; sie enthält das spezifisch räumliche Element. 78

46 Eine Sprache, die sich eines Koordinatensystems bedient. Das geschriebene Zeichen ohne das Koordinatensystem ist sinnlos. 79

V

47 Es fällt uns nichts auf, wenn wir uns umsehen, im Raum herumgehen, unseren eigenen Körper fühlen etc., etc., weil es zu der Form unserer Welt keinen Gegensatz gibt. Die Selbstverständlichkeit der Welt drückt sich eben darin aus, daß die Sprache nur sie bedeutet und nur sie bedeuten kann. 80

48 Der Strom des Lebens, oder der Strom der Welt, fließt dahin, und unsere Sätze werden nur in Augenblicken verifiziert. Dann sind sie mit der Gegenwart kommensurabel. 80

49 Vielleicht beruht die Schwierigkeit auf der Übertragung des Zeitbegriffs der physikalischen Zeit auf den Verlauf der unmittelbaren Erlebnisse. Wir reden nicht von gegenwärtigen, vergangenen und zukünftigen Vorstellungen. 81

50 ›Ich sehe nicht die Vergangenheit, sondern nur ein *Bild* der Vergangenheit.‹ Aber woher weiß ich, daß es ein Bild der *Vergangenheit* ist? 82

51 So gibt es auf dem Filmstreifen ein gegenwärtiges Bild, vergangene und zukünftige Bilder; auf der Leinwand aber ist nur die Gegenwart. 83

52 Man kann nicht sagen ›die Zeit fließt‹, wenn man mit ›Zeit‹ die Möglichkeit der Veränderung meint. — Es kommt uns auch vor, als wäre die Erinnerung ein schwaches Bild dessen, was ursprünglich in voller Deutlichkeit vor uns war. Und in der physikalischen Sprache stimmt das. 83

53 Aber es läßt sich auch noch *anders* sagen; und das ist wichtig. Der Ausdruck ›optische Täuschung‹, z. B., gibt die Idee eines Fehlers, auch wenn keiner vorliegt. Es ließe sich eine Sprache denken, die absolut *sachlich* wäre. 84

54 Nur was wir uns auch anders vorstellen können, kann die Sprache sagen. Daß alles fließt, muß in der *Anwendung* der Sprache ausgedrückt sein. Und wenn man sagt, die *gegenwärtige Erfahrung* nur hat Realität, so muß hier das Wort ›gegenwärtig‹ überflüssig sein. 84

55 Gewisse wichtige Sätze, welche eine Erfahrung beschreiben, die auch hätte anders sein können: wie z. B., daß mein Gesichtsbild beinahe unausgesetzt in Veränderung begriffen ist. 86

56 Wenn ich einen Satz wie ›Julius Cäsar ging über die Alpen‹, aussage, beschreibe ich damit nur meinen gegenwärtigen Geisteszustand? — Der Satz sagt, was ich glaube. Wenn ich wissen will, was das ist, so ist am besten zu fragen, *warum* ich ihn glaube. 86

VI

57 Eine irreführende Darstellungsweise unserer Sprache ist der Gebrauch des Wortes ›ich‹, besonders dort, wo sie damit das unmittelbare Erlebnis darstellt. Wie wäre es, wenn dieses Erlebnis *ohne* Hilfe des persönlichen Fürworts dargestellt würde? 88

58 Etwa so: Wenn ich, L. W., Zahnschmerzen habe, so wird gesagt: ›Es gibt Zahnschmerzen.‹ Anderenfalls: ›A benimmt sich wie L. W., wenn es Zahnschmerzen gibt.‹ Die Sprache kann jeden beliebigen als Zentrum haben. Daß sie mich zum Zentrum hat, liegt in der Anwendung. Die Sonderstellung läßt sich nicht aussprechen. Ob ich sage, daß das Dargestellte *nicht* eines unter mehreren ist; oder, daß ich den Vorzug *meiner* Sprache nicht aussprechen kann — so führt es beidemal zu demselben. 88

59 Unmöglich, etwas zu glauben, was man nicht irgendwie verifiziert denken kann. Das kann ich, wenn ich glaube, daß jemand traurig ist. Und ich kann nicht *glauben*, daß *ich* traurig bin. 89

60 Hat es *Sinn* zu sagen, daß zwei Menschen denselben Körper haben? 90

61 Wie unterscheiden sich *seine* Zahnschmerzen von den *meinen*? 90

62 ›Wenn ich sage, daß er Zahnschmerzen hat, so meine ich, daß er jetzt das hat, was ich damals hatte.‹ Aber ist das eine Relation, die die Zahnschmerzen damals zu mir hatten und jetzt zu ihm? 91

63 Ich könnte von Zahnschmerzen (Gefühlsdatum) im Zahn des Anderen reden, in dem Sinne, in dem es möglich wäre, in dem Zahn des anderen Menschen Mund Schmerzen zu empfinden. 92

64 Wenn ich sage, ›A hat Zahnschmerzen‹, so gebrauche ich die Vorstellung des Schmerzgefühls in derselben Weise, wie etwa den Begriff des Fließens, wenn ich vom Fließen des elektrischen Stromes rede. — Die Hypothesen, daß (1) andere Menschen Zahnschmerzen haben, und daß (2) andere Menschen sich genau so benehmen wie ich, aber keine Schmerzen haben — können dem Sinne nach identisch sein. 93

65 Unsere Sprache gebraucht den Ausdruck ›meine Schmerzen‹ und ›seine Schmerzen‹, und auch ›ich habe (oder fühle) Schmer-

zen«, aber: ›ich fühle meine Schmerzen« oder ›ich fühle seine Schmerzen« ist Unsinn. 94

66 Wie wäre es, wenn ich zwei Körper hätte, d. h., wenn mein Körper aus zwei getrennten Leibern bestünde? — Die Philosophen, die glauben, daß man im Denken die Erfahrung gleichsam ausdehnen kann, sollten daran denken, daß man durch's Telefon die Rede, aber nicht die Masern übertragen kann. 95

VII

67 Angenommen, ich hätte ein so gutes Gedächtnis, daß ich mich meiner sämtlichen Sinneseindrücke erinnern könnte. Ich könnte diese beschreiben, indem ich z. B. die Gesichtsbilder plastisch darstellte, nur so weit ausgeführt, als ich sie wirklich gesehen habe, und durch einen Mechanismus bewegt. 97

68 Wenn ich eine Sprache beschreibe, beschreibe ich etwas Physikalische. Wie kann aber eine physikalische Sprache das Phänomen beschreiben? 97

69 Das Phänomen (*specious present*) enthält die Zeit, ist aber nicht in der Zeit. Während die Sprache zeitlich abläuft. 98

70 Wir brauchen eine Ausdrucksweise, in der wir die Phänomene des Gesichtsraums als solche isoliert darstellen können. 98

71 Nur in der Sprache des physikalischen Raumes heißt der Gesichtsraum subjektiv. Das Wesentliche ist, daß die Darstellung des Gesichtsraums ein Objekt darstellt und keine Andeutung eines Subjekts enthält. 99

72 Wie kann ich erkennen, daß ich die Welt durch die Pupille meines Augapfels sehe? Doch nicht wesentlich anders als, daß ich sie durch das Fenster sehe. 100

73 Im Gesichtsraum ist nicht ein Auge, welches mir gehört, und

Augen, die anderen gehören. Nur der Raum selbst ist unsymmetrisch. 102

74 Die Ausnahmestellung meines Körpers im Gesichtsraum rührt von anderen Gefühlen her, und nicht von etwas rein Visuellem. 102

75 Ist die Zeit der isolierten ›visuellen‹ Phänomene die Zeit unserer physikalischen Ausdrucksweise? Ich denke mir die Veränderungen in meinem Gesichtsraum ruckweise und zeitlich mit den Schlägen eines Metronoms zusammenfallend. So kann ich sie beschreiben, und die Beschreibung mit dem, was wirklich vorgeht, vergleichen. Ein Irrtum meines Gedächtnisses? Nein; ein Irrtum, der prinzipiell nicht entdeckt werden kann, ist kein Irrtum. Und hier ist die Zeit meines Gedächtnisses eben die Zeit, die ich beschreibe. 103

VIII

76 Unmöglich, daß Rot und Grün zugleich an einem Ort seien. Was wäre eine Mischfarbe von Rot und Grün? Auch verschiedene Grade von Rot sind miteinander unverträglich. — Und dennoch kann ich sagen: ›Es gibt ein noch röteres Blau als das rötere dieser beiden.‹ D. h., ich kann aus dem Gegebenen das Nichtgegebene konstruieren. — Ist innerhalb des Elementarsatzes eine Konstruktion möglich, die nicht mit Hilfe der Wahrheitsfunktionen arbeitet und auch eine Wirkung auf das logische Folgen eines Satzes aus einem anderen hat? Dann können zwei Elementarsätze einander widersprechen. 105

77 Es hängt das mit der Idee der *vollständigen Beschreibung* zusammen. 106

78 Daß r und g das f vollständig ausfüllen — das zeigt sich in unseren Zeichen nicht. Es muß sich aber zeigen, wenn wir nicht das Zeichen, sondern das Symbol betrachten. Denn, da dieses die Form der Gegenstände einbegreift, so muß sich dort, in dieser Form, die Unmöglichkeit von › $f(r) \cdot f(g)$ ‹ zeigen. 106

79 Also darf ich zwei bestimmte Sätze anschreiben, aber nicht ihr logisches Produkt? Man kann sagen, daß hier das » \cdot « eine andere Bedeutung hat. 107

80 Eine Mischfarbe, oder Zwischenfarbe, von blau und rot ist dies durch eine interne Relation zu den Strukturen von Rot und Blau. Aber diese interne Relation ist *elementar*. D. h., sie besteht nicht darin, daß der Satz »a ist blaurot« ein logisches Produkt von »a ist blau« und »a ist rot« darstellt. 107

81 Wie mit Farben, so auch mit Tönen oder elektrischen Ladungen. Immer die vollständige Beschreibung eines Zustandes in *einem* Punkt oder zur selben Zeit. Aber wie kann ich es ausdrücken, daß zum Beispiel die Farbe vollständig beschrieben ist? Wie kann ich bewirken, daß ein zweiter Satz von derselben Form dem ersten widerspricht? — Zwei Elementarsätze können einander nicht widersprechen. 108

82 Es gibt Regeln über die Wahrheitsfunktionen, die auch vom elementaren Teil des Satzes handeln. Die Sätze werden in diesem Falle Maßstäben noch ähnlicher. Das Stimmen *eines* Maßes schließt automatisch alle anderen aus. Ich lege nicht den Satz als Maßstab an die Wirklichkeit an, sondern das *System* von Sätzen. Auch bei der negativen Beschreibung: ohne den Maßstab kann mir sein Nullpunkt nicht gegeben sein. 109

83 Der Begriff der unabhängigen Koordinaten der Beschreibung. Die Sätze, die z. B. durch »und« verbunden werden, sind nicht voneinander unabhängig, sondern sie bilden *ein* Bild und lassen sich auf ihre Vereinbarkeit oder Unvereinbarkeit prüfen. 111

84 Jede Aussage bestünde dann im Einstellen einer Anzahl von Maßstäben, und das Einstellen eines Maßstabes auf zwei Teilstriche zugleich ist unmöglich. 112

85 Daß alle Sätze die Zeit enthalten, scheint uns zufällig, im Vergleich dazu, daß auf alle Sätze die Wahrheitsfunktionen anwendbar sind. 112

86 Die Syntax verbietet eine Bildung wie ›a ist grün und a ist rot‹, aber für ›a ist grün‹ ist ›a ist rot‹ sozusagen kein *anderer* Satz, sondern eine andere Form desselben Satzes. Die Syntax zieht dadurch die Sätze zusammen, die *eine* Bestimmung sind. 113

IX

87 Der allgemeine Satz ›ich sehe einen Kreis auf rotem Grund‹ — ein Satz, der Möglichkeiten offen läßt. Was hätte diese Allgemeinheit mit einer Gesamtheit von Gegenständen zu tun? Die Allgemeinheit in diesem Sinne tritt also in die Lehre von den Elementarsätzen ein. 115

88 Wenn ich nur einen Teil des Gesichtsfeldes beschreibe, muß meine Beschreibung doch den ganzen Gesichtsraum enthalten. Die Form (die logische Form) des Flecks setzt tatsächlich den ganzen Raum voraus. 115

89 Kann ich in einem Satz eine Bestimmung offen lassen, *ohne* zugleich genau anzugeben, was die offengelassenen Möglichkeiten sind? ›Ein roter Kreis befindet sich im Quadrat.‹ Wie weiß ich denn so einen Satz? Kann ich ihn je als unendliche Disjunktion wissen? 116

90 Allgemeinheit und Verneinung. ›Es gibt einen roten Kreis, der nicht im Quadrat ist.‹ Ich kann nicht den Satz ›Dieser Kreis ist nicht im Quadrat‹ so ausdrücken, daß das ›nicht‹ *vor* den Satz zu stehen kommt. Das hängt damit zusammen, daß es Unsinn ist, einem Kreis einen Namen zu geben. 116

91 ›Alle Kreise sind im Quadrat‹ kann entweder heißen ›eine gewisse Anzahl von Kreisen ist im Quadrat‹ oder: ›es ist kein Kreis außerhalb‹. Der letzte Satz ist aber wieder die Verneinung einer Allgemeinheit, und nicht die Verallgemeinerung einer Verneinung. 117

92 Die Wortgattung wird erst durch alle grammatischen Regeln

bestimmt, die von einem Wort gelten, und so betrachtet hat unsere Sprache eine Unmenge verschiedener Wortarten. 118

93 Die Subjekt-Prädikatsform ist noch keine logische Form. Die Sätze: ›Der Teller ist rund‹, ›Der Mann ist groß‹, ›Der Fleck ist rot‹, haben in ihrer Form nichts Gemeinsames. — Begriff und Gegenstand, das ist aber Prädikat und Subjekt. 118

94 Wer einmal mit der Arithmetik angefangen hat, wird sich nicht mehr um Funktionen und Gegenstände kümmern. — Die Beschreibung eines Gegenstandes darf nicht aussagen, was für seine Existenz wesentlich wäre. 119

95 Wenn ich drei gleichgroßen visuellen Kreisen Eigennamen gebe — benenne ich jedenfalls immer (direkt oder indirekt) einen Platz. Das Charakteristische der Sätze von der Art ›dies ist . . .‹ ist nur, daß in das Symbol irgendwie die Realität außerhalb des sogenannten Zeichensystems eintritt. 119

96 Was bleibt hier, wenn Form und Farbe wechseln? Denn die Lage ist ein Teil der Form. Es ist klar, daß hier das Wort ›Träger der Eigenschaft‹ eine ganz falsche — unmögliche — Vorstellung gibt. 120

97 Beiläufig gesprochen ist die Gleichung eines Kreises das Zeichen für den Begriff Kreis. So ist es, als ob hier die Mittelpunktskoordinaten das wären, was den unter den Begriff fallenden Gegenständen entspräche. In Wahrheit ist das Zahlenpaar, das die Mittelpunktskoordinaten darstellt, nicht irgendein Ding, sondern es charakterisiert eben dasjenige am Symbol, was die ›Verschiedenheit‹ der Kreise ausmacht. 121

98 Die Angabe des Hier darf nicht präjudizieren, *was* hier ist. $F(x)$ muß eine *externe* Beschreibung von x sein. — Aber wenn ich nun sage ›hier ist ein Kreis‹ und ein andermal ›hier ist eine Kugel‹, sind die beiden Hier von gleicher Art? 122

99 Zahl und Begriff. Hat es einen Sinn, von einer Anzahl von Gegenständen zu reden, die nicht unter einen Begriff gebracht sind? Aber ich kann z. B. den Begriff bilden, ›Glied zwischen a und b‹. 123

100 Die Zahlen sind Bilder der Begriffsumfänge. Man könnte den Begriffsumfang wie einen Gegenstand betrachten, dessen Name nur im Satzzusammenhang Sinn hat. Im Symbolismus wird tatsächlich zugeordnet, während in der Bedeutung nur von der Möglichkeit der Zuordnung die Rede ist. 124

101 Im Zeichen $1+1+1+1+1+1+1$ kann ich doch auf jeden Fall 3 und 4 unterscheiden. 124

102 Die Zahlen können nur definiert werden aus Satzformen, unabhängig davon, welche Sätze wahr oder falsch sind. Die Möglichkeit, diese 4 Äpfel zu 2 und 2 zusammenzufassen, bezieht sich auf den Sinn, nicht auf die Wahrheit eines Satzes. 125

103 Kann ein Satz (A) in der PM Notation den Sinn von $5+7=12$ geben? Aber wie habe ich denn das Zahlzeichen in der rechten Klammer erhalten, wenn ich nicht weiß, daß es durch Addition der beiden linken Zahlzeichen entstanden ist? 125

104 Was uns lehrt, daß sich die 5 Striche und die 7 gerade zu 12 vereinigen, ist immer nur die Einsicht in die interne Beziehung der Strukturen — keine Überlegung der Logik. 127

105 Eine Extension ist eine Charakteristik des Sinnes eines Satzes. 127

106 Das, was A außer dem arithmetischen Schema enthält, darf nur das sein, was zur Anwendung des Schemas notwendig ist. Notwendig dazu ist aber gar nichts. 128

107 Keine Untersuchung der Begriffe kann vermitteln, daß

$3 + 2 = 5$; sowenig wie es sich aus einer Betrachtung von Begriffen ergibt, daß A eine Tautologie ist. Die Zahlen müssen von der Art dessen sein, wodurch wir sie darstellen. 129

108 Die Arithmetik ist die Grammatik der Zahlen. 129

109 Jede Rechnung der Mathematik ist eine Anwendung ihrer selbst und hat nur als solche Sinn. *Darum* ist es nicht nötig, hier von der allgemeinen Form der logischen Operationen zu reden. — Die Arithmetik ist eine allgemeinere Geometrie. 130

110 Man wundert sich gleichsam, daß die Ziffern, losgelöst von ihren Definitionen, so richtig arbeiten; was mit der inneren Widerspruchslosigkeit der Geometrie zusammenhängt. Die allgemeine Form der Anwendung der Arithmetik scheint dadurch dargestellt zu sein, daß *nichts* über sie ausgesagt wird. 131

111 Die arithmetischen Konstruktionen sind autonom, wie die geometrischen, und daher garantieren sie selbst ihre Anwendbarkeit. 132

112 Wenn drei Striche auf dem Papier das Zeichen für die 3 sind, dann kann man sagen, die 3 ist so anzuwenden, wie sich drei Striche anwenden lassen. (Vgl. § 107) 133

113 Die Zahlangabe über den Umfang eines Begriffs ist ein Satz. Die Zahlangabe über den Umfang einer Variablen ist keiner — denn ich kann sie aus dieser selbst ableiten. 133

114 Weiß ich, daß es 6 Permutationen von 3 Elementen gibt, auf die gleiche Weise, wie, daß 6 Personen im Zimmer sind? Nein. Darum ist jener Satz von anderer Art als dieser. 134

XI

115 Die Zahlangabe enthält nicht immer eine Verallgemeinerung oder Unbestimmtheit. Z. B.: ›Ich sehe 3 gleichgroße Kreise in gleichen Abständen angeordnet.‹ Unbestimmt wäre etwa: Ich

weiß, daß 3 Dinge die Eigenschaft E haben, weiß aber nicht, *welche*. Hier wäre es unsinnig zu sagen, ich wisse nicht *welche* Kreise es sind. 136

116 Es gibt keinen Begriff ›reine Farbe‹. Analog mit den Permutationen. Wenn man sagt, A B lasse zwei Permutationen zu, so klingt das, als mache man eine allgemeine Aussage. Aber ›Es sind 2 Permutationen möglich‹ kann nicht weniger, d.h. etwas Allgemeineres sagen als das Schema A B, B A. Sie sind nicht die Extension eines Begriffs, sondern sie sind der Begriff. 137

117 Es ist eine mathematische Frage: ›wieviele Permutationen von 4 Elementen gibt es?‹, genau wie: ›wieviel ist 25×18 ?‹ Denn es gibt eine allgemeine Methode der Lösung beider. 139

118 In Russells Theorie kann nur die *wirkliche* Zuordnung die ›Ähnlichkeit‹ zweier Klassen zeigen. Nicht die Möglichkeit der Zuordnung, denn diese besteht eben in der Gleichheit der Zahlen. 140

119 Welcher Art ist die *Unmöglichkeit* der 1-1 Zuordnung von 3 Kreisen und 2 Kreuzen? — Von einer Extension zu sagen, sie habe diese und diese Zahl, ist Unsinn, denn die Zahl ist eine *interne* Eigenschaft der Extension. 140

120 Ramsey erklärt das Zeichen ›= \langle so: $x=x$ ist Taut.; $x=y$ ist Kont. Wie verhält sich dann › $\stackrel{\text{Def}}{=}$ ‹ zu ›= \langle ? — Die Gleichungen der Mathematik kann man nur mit sinnvollen Sätzen vergleichen, nicht mit Tautologien. 141

121 Eine Gleichung ist eine syntaktische Regel. Zeichenregeln kann man als Sätze auffassen, aber man *muß* sie nicht so auffassen. Der Widerspruch von ›heterologisch‹. 143

122 Die Allgemeinheit einer mathematischen Behauptung ist anders als die Allgemeinheit des Satzes, der bewiesen ist. Ein mathematischer Satz ist der Hinweis auf einen Beweis. Die Allgemeinheit hat nur dann einen Sinn, wenn sie — d. h. alle Werte der Variablen — völlig bestimmt ist. 143

XII

123 Ich erfasse eine unendliche Strecke auf andere Weise als eine endlose. Der Satz über sie kann nicht durch ein endlos gedachtes Schreiten verifiziert werden, sondern nur mit *einem* Schritt. 146

124 Es ist nicht etwa nur ›für uns Menschen‹ unmöglich, alle Zahlen sukzessive zu erfassen, sondern es heißt nichts. Die Gesamtheit ist nur als Begriff vorhanden. 146

125 Schon, daß mit dem logischen Begriff $(1, \xi, \xi + 1)$ die Existenz seiner Gegenstände bereits gegeben ist, zeigt, daß er sie bestimmt. Das Fundamentale ist nur die Wiederholung einer Operation. Die dreimalige Operation $+1$ erzeugt und *ist* die Zahl 3. 147

126 Es scheint jetzt, daß die Allgemeinheitsbezeichnung für Zahlen keinen Sinn hat. 148

127 Wenn der Satz durch kein endliches Produkt wahr gemacht wird, so heißt das, er wird durch *kein* Produkt wahr gemacht. Und darum ist er kein logisches Produkt. 148

128 Kann ich wissen, daß *eine* Zahl einer Gleichung genügt, ohne daß irgendein endlicher Bereich für ihr Vorkommen in der unendlichen Reihe abgegrenzt ist? 149

129 Ein Satz, der von allen Sätzen, oder allen Funktionen handelt, ist unmöglich. Die *Allgemeinheit* in der Arithmetik wird durch die Induktion dargestellt. 150

130 Der Fehler (Zirkel) in der Dedekindschen Erklärung des Unendlichkeitsbegriffs liegt in der Anwendung des Begriffs ›alle‹ in der formalen Implikation. Was dem, was wir meinen, wirklich entspricht, ist gar kein Satz, sondern der *Schluß* von φx auf ψx , wenn dieser Schluß gestattet ist — aber der wird nicht durch einen Satz ausgedrückt. 151

131 Allgemeinheit in der euklidischen Geometrie. Sonderbar, daß, was für ein Dreieck gilt, darum für alle andern gelten sollte. Die Konstruktion des Beweises ist aber wieder kein Experiment, sondern die Beschreibung der Konstruktion muß genügen. — Was demonstriert wird, kann nicht durch einen Satz ausgedrückt werden. 152

132 ›Einmal wird die Welt untergehen‹ sagt gar nichts, denn damit wäre es verträglich, daß sie an jedem angegebenen Tag noch existiert. ›Wie viele 9 folgen unmittelbar nacheinander auf 3,1415 in der Entwicklung von π ?‹ Soll sich diese Frage auf die Extension beziehen, dann hat sie nicht den Sinn der Frage, die uns interessiert. (›Ich erfasse eine unendliche Strecke auf andere Weise als eine endlose.‹) 153

133 Die Schwierigkeit, die einfachen Grundsätze anzuwenden, macht einen an diesen Grundsätzen selbst irre. 153

134 ›Ich habe das Lineal sich von der Tangente t_1 nach t_2 bewegen sehen, also muß ich es in t gesehen haben.‹ Wenn ich hier scheinbar von einem allgemeinen Satz auf einen Spezialfall schließe, so ist die Quelle dieses allgemeinen Satzes nie die Erfahrung und der Satz wirklich kein Satz. 154

135 ›Wir kennen die Unendlichkeit nur aus der Beschreibung.‹ Nun, dann gibt es eben nur diese Beschreibung und nichts sonst. 155

136 Setzt eine Notation für das Unendliche den unendlichen Raum oder unendliche Zeit voraus? Dann müßte die Möglichkeit einer solchen Hypothese irgendwo vorgebildet sein. Das Problem des kleinsten sichtbaren Unterschieds. 155

137 Wenn ich die Strecke nicht mehr sichtbar unterteilen kann, so kann ich auch nicht den Versuch dieser Unterteilung machen, kann also nicht das Mißlingen eines solchen Versuches sehen. Die Kontinuität im Gesichtsfeld besteht darin, daß wir keine Diskontinuität sehen. 156

138 Die Erfahrung als Erleben der Tatsachen gibt mir das Endliche; die Gegenstände *enthalten* das Unendliche. Natürlich nicht als eine mit der endlichen Erfahrung konkurrierende Größe, sondern intentional. (Die unendliche Möglichkeit ist *keine* Größe.) Der Raum hat keine Ausdehnung, nur die räumlichen Gegenstände sind ausgedehnt, aber die Unendlichkeit ist eine Eigenschaft des Raumes. 157

139 Unendliche Teilbarkeit: daß *jede* endliche Zahl von Teilen denkbar ist, aber keine unendliche; daß aber eben darin die unendliche Teilbarkeit besteht. — Daß ein Fleck im Gesichtsraum in drei Teile geteilt werden kann, heißt, daß ein Satz, der einen derart geteilten Fleck beschreibt, Sinn hat. Dagegen bedeutet die unendliche Teilbarkeit nicht, daß es einen Satz gibt, der eine in unendlich viele Teile geteilte Strecke beschreibt. Diese Möglichkeit wird also nicht durch eine Wirklichkeit der Zeichen angezeigt, sondern durch eine Möglichkeit anderer Art der Zeichen selbst. 158

140 Die Möglichkeit aller Zukunft hat die Zeit *jetzt* in sich. Der menschliche Bewegungsraum ist unendlich, wie die Zeit. 160

141 Die Regeln über das Zahlensystem — etwa das Dezimalsystem — enthalten alles, was an den Zahlen unendlich ist. — Es hängt alles an der Syntax von Wirklichkeit und Möglichkeit. $m=2n$ enthält die *Möglichkeit der Zuordnung jeder Zahl zu einer andern, aber es ordnet nicht alle Zahlen anderen zu.* 161

142 Die Sätze ›In dieser Richtung können 3 Dinge liegen‹ und ›In dieser Richtung können unendlich viele Dinge liegen‹ sind nur scheinbar gleich gebaut, in Wirklichkeit aber verschiedener Struktur. Und zwar spielt das ›unendlich viele‹ im zweiten Satz nicht die Rolle der ›3‹ im ersten Satz. 162

143 Die leere unendliche Zeit ist nur die Möglichkeit von Tatsachen, die erst die Realitäten sind. — Ist eine unendliche Realität, dann gibt es auch den Zufall im Unendlichen. Also z. B. auch die unendliche Dezimalzahl, die durch kein Gesetz gegeben ist. — Die

Unendlichkeit liegt in der Natur der Zeit, sie ist nicht ihre zufällige Ausdehnung. 163

144 Die unendliche Zahlenreihe ist nur die unendliche Möglichkeit von endlichen Zahlenreihen. In den Zeichen selbst liegt nur die Möglichkeit und nicht die Wirklichkeit der Wiederholung. Die Mathematik darf nicht versuchen, von ihrer Möglichkeit zu reden. Wenn sie versucht, ihre Möglichkeiten *auszusprechen*, d. h. wenn sie sie mit ihrer Wirklichkeit verwechselt, dann darf man sie in ihre Grenzen zurückweisen. 164

145 Regellose unendliche Dezimalzahl. ›Die Zahl die herauskommt, wenn man endlos würfelt‹ scheint unsinnig zu sein. — Eine unendliche Baumreihe. Wenn ein Gesetz gegeben ist, nach welchem die Höhe der Bäume wechselt, so ist die Reihe durch das Gesetz bestimmt und vorstellbar. Wenn ich nun annehme, daß es eine regellose Reihe geben kann, so ist das eine Reihe über die ihrem Wesen nach nichts anderes bekannt sein kann, als daß ich sie nicht kennen kann. 165

146 Das multiplikative Axiom. Im Falle einer endlichen Klasse von Klassen, kann man eine Auswahl tatsächlich herstellen. Bei unendlich vielen Teilklassen kann ich aber nur das Gesetz der Bildung einer Auswahl kennen. Hier ist das Unendliche nur in der Vorschrift enthalten. 167

147 Was uns glauben macht, daß es unendlich viele Dinge vielleicht gibt, ist nur, daß wir die Dinge der Physik mit den Elementen der Erkenntnis verwechseln. Die Analyse von ›Der Fleck liegt irgendwo zwischen a und b‹: hier wird nicht die unendliche Möglichkeit der Lagen ausgesprochen. — Der Schein einer unendlichen Hypothese, wobei man die Stücke der Materie mit den einfachen Gegenständen verwechselt. Was man sich ins Unendliche vermehrt denken kann, sind die Kombinationen der Dinge nach ihren unendlichen Möglichkeiten, aber nie die Dinge selbst. 168

148 Wenn wir keine Ahnung haben, wie ein gewisser Satz zu beweisen ist, und doch fragen: ›Läßt er sich beweisen oder nicht?‹ Man kann nicht den *Sinn*, den man nicht kennt, logisch planvoll suchen. Der Satz muß durch seinen Sinn uns aufweisen, wie wir uns von seiner Wahr- oder Falschheit überzeugen sollen. 170

149 Der Beweis der Relevanz wäre einer, der noch nicht den Satz ergeben würde, sondern die Form einer Methode, nach welcher man den Satz überprüfen kann. 170

150 Ich kann den allgemeinen (algebraischen) Satz so sehr oder so wenig behaupten wie die Gleichung $3 \times 3 = 9$ oder $3 \times 3 = 11$. Die allgemeine Lösungsmethode ist selbst ein Aufschluß über die Natur der Gleichung. Auch im Einzelfall sehe ich nur die Regel. ›Die Gleichung ergibt a‹ heißt: Wenn ich die Gleichung nach gewissen Regeln umändere, erhalte ich a. Aber diese Regeln müssen mir schon gegeben sein, ehe das Wort ›ergibt‹ Bedeutung hat und ehe die Frage einen Sinn hat. 172

151 Nur dort kann man in der Mathematik fragen, wo die Antwort lautet: ›Ich muß es ausrechnen.‹ Die Frage ›Wie viele Lösungen hat diese Gleichung?‹ ist das In-Bereitschaft-Halten der allgemeinen Methode ihrer Lösung. Und das ist überhaupt, was eine Frage der Mathematik ist: Das Bereit-halten einer allgemeinen Methode. 175

152 Ich kann erst fragen, ob die Dreiteilung des Winkels möglich ist, wenn ich das System ›Lineal und Zirkel‹ in ein größeres eingebettet sehe, worin diese Frage einen Sinn hat. — Das System von Regeln, welche einen Kalkül bestimmen, bestimmt damit auch die ›Bedeutung‹ seiner Zeichen. Ändere ich also die Regeln, so ändere ich die Form, die Bedeutung. — Man kann in der Mathematik nicht allgemein von Systemen, sondern nur *in* Systemen reden. 177

153 Ein mathematischer Beweis ist die Analyse des mathemati-

schen Satzes. Es genügt nicht zu sagen ›p ist beweisbar‹, sondern: ›beweisbar nach einem bestimmten System‹. ›p verstehen‹ heißt, sein System verstehen. 179

154 Ich kann fragen ›welche Lösung hat diese Gleichung?‹, aber ich kann nicht fragen, ›hat sie eine Lösung?‹ — Es ist unmöglich, Entdeckungen neuartiger Regeln zu machen, die von einer uns bekannten Form gelten. — Der Satz: ›Es ist möglich — wenn auch nicht notwendig — daß p für alle Zahlen gilt‹, ist unsinnig. Denn ›notwendig‹ und ›alle‹ gehören in der Mathematik zusammen. 181

155 Das Finden eines neuen Systems (z. B. die Entdeckung Sheffers). Man kann nicht sagen: Alle diese Resultate hatte ich schon, ich finde jetzt nur einen besseren Weg, der zu allem führt. Der neue Weg macht ein neues System aus. 182

156 Das Knoten-Auflösen in der Mathematik. Von einem eigentlichen Versuch der Lösung kann man nur *insoweit* sprechen, als die Struktur des Knotens klar gesehen ist. 184

157 Man kann Mathematik nicht schreiben, sondern nur machen. — Angenommen, ich käme durch Zufall auf die richtige Konstruktion eines Fünfecks. Aber wenn ich diese Konstruktion nicht verstehe, so ist sie für mich noch gar nicht die Fünfecks-Konstruktion. In dem, was ich verstehe, verschwindet dann die Art, wie ich dazu gekommen bin. 186

158 Wo jetzt ein Zusammenhang bekannt ist, der früher noch nicht bekannt war, dort war früher nicht eine offene Stelle, eine Unvollständigkeit, die jetzt ausgefüllt ist. — Induktion: Wenn ich das Gesetz der Spirale kenne, so ist das in vieler Beziehung analog dem Fall, in dem ich eine Gesamtheit von Windungen kenne. Doch nicht *ganz* analog — und das ist eben alles. 187

159 Ist es denn eine Frage, ob es eine endliche Zahl aller Primzahlen gibt oder nicht? Kann ich die allgemeine Form der Primzahlen hinschreiben — wie z. B.: ›die Division von ... durch

kleinere Zahlen ergibt einen Rest — dann ist keine Frage ›wieviel‹ Primzahlen es gibt. Aber da wir das Wort ›Primzahl‹ haben konnten, noch ehe der strenge Ausdruck vorhanden war, so könnte man die Frage fälschlich bilden. Nur in unserer Wortsprache gibt es in der Mathematik ›noch ungelöste‹ Probleme. 188

160 Ein Beweis der Widerspruchsfreiheit kann nicht wesentlich sein für die Anwendung der Axiome. Denn diese sind Sätze der Syntax. 189

161 Polar-Expedition und mathematische Expedition. Wie kann es in der Mathematik Vermutungen geben? Kann ich eine Hypothese über die Verteilung der Primzahlen aufstellen? Welche Art der Verifikation lasse ich dann gelten? Den Beweis kann ich nicht vermuten. Und ist der Beweis geliefert, so beweist er nicht, was vermutet worden war. 189

162 Sheffers Entdeckung. Die Systeme sind ja nicht in *einem* Raum, so daß ich sagen könnte: Es gibt Systeme mit 3 und 2 logischen Konstanten, und nun suche ich die Zahl der Konstanten *in derselben Weise* zu vermindern. — Der mathematische Satz ist nur die unmittelbar sichtbare Oberfläche des ganzen Beweiskörpers, den sie vorne begrenzt. 191

XIV

163 Beweis des assoziativen Gesetzes? Als Grundregel eines Systems kann er nicht bewiesen werden. Der gewöhnliche Fehler ist, die Extension seiner Anwendung mit dem zu verwechseln, was der Beweis eigentlich enthält. — Kann man beweisen, daß durch Addition von Formen $((1 + 1) + 1)$ etc. immer wieder Ziffern dieser Form entstehen müssen? Der Beweis liegt in der Regel, d. h. in der Definition und in nichts anderem. 193

164 Ein rekurrierender Beweis ist nur die allgemeine Anweisung auf beliebige spezielle Beweise: die allgemeine Form des

Fortschreitens in dieser Reihe. Seine Allgemeinheit ist nicht die gewünschte, sondern besteht darin, daß man den Beweis wiederholen kann. Das, was wir aus jenem Beweis entnehmen, kann man überhaupt nicht in einem Satz darstellen. 196

165 Der richtige Ausdruck des assoziativen Gesetzes ist kein Satz, sondern gerade sein Beweis, der allerdings das Gesetz nicht behauptet. Ich weiß, daß die spezielle Gleichung stimmt, ebenso gut, als hätte ich sie vollständig abgeleitet. Also ist sie wirklich bewiesen. Die *eine* Spiralwindung, zusammen mit den Zahlformen der gegebenen Gleichung, genügt. 198

166 Man sagt, die Induktion ist ein Zeichen, daß das und das für alle Zahlen gilt. Aber die Induktion ist kein Zeichen für irgend etwas anderes als sich selbst. — Vergleich der Allgemeinheit der eigentlichen Sätze mit der Allgemeinheit der Arithmetik. Sie wird anders verifiziert und darum ist sie eine andere. 200

167 Die Induktion beweist den algebraischen Satz nicht, aber sie rechtfertigt die Aufstellung von algebraischen Gleichungen vom Standpunkte der Anwendung auf die Arithmetik. D. h., sie erhalten von der Induktion erst ihren Sinn, nicht ihre Wahrheit. Die Induktion verhält sich zum algebraischen Satz nicht wie der Beweis zum Bewiesenen, sondern wie das Bezeichnete zum Zeichen. 201

168 Wenn wir fragen, ›ist $a + (b + c) = (a + b) + c$?‹, was können wir meinen? — Der algebraische Satz spricht keine Allgemeinheit aus, sondern sie zeigt sich in der formellen Beziehung zu der Substitution, die sich als Glied der Induktionsreihe erweist. 202

169 Man kann jede arithmetische Gleichung von der Form $a \times b = c$ beweisen, oder sein Gegenteil beweisen. Ein Beweis dieser Beweisbarkeit wäre das Aufzeigen einer Induktion, die erkennen läßt, welcher Art die Sätze sind, zu denen die Leiter führt. 204

170 Die Mengenlehre sagt: das wirklich Unendliche sei nicht mit dem arithmetischen Symbolismus zu fassen, es könne also nur beschrieben und nicht dargestellt werden. Als könne man von einer logischen Struktur reden, ohne sie in dem Satz selber wiederzugeben. Die Methode, jeden Begriff so zu behandeln, daß seine Form verschwindet. 206

171 Alle Beweise der Stetigkeit einer Funktion müssen sich auf ein Zahlensystem beziehen. Die Zahlenleiter, die bei der Ausrechnung der Funktion wesentlich zu Tage tritt, darf nicht in der allgemeinen Betrachtung verschwinden. — Läßt sich denn das Kontinuum beschreiben? Eine Form kann nicht beschrieben, sondern nur dargestellt werden. 207

172 ›Der höchste Punkt einer Kurve‹ bedeutet nicht ›der höchste unter allen Punkten der Kurve‹. Ebenso ist das Maximum einer Funktion nicht der größte Wert unter allen Werten. Sondern ich kann den höchsten Punkt *konstruieren*, d. h., ihn aus einem Gesetz erhalten. 208

173 Der Ausdruck ›(n) . . .‹ hat einen Sinn, wenn bloß die unbegrenzte Möglichkeit des Fortschreitens vorausgesetzt wird. — Brouwer. — Die Erklärung des Dedekindschen Schnittes, als wäre sie anschaulich: Entweder hat R ein letztes Glied, und L ein erstes, oder etc. Tatsächlich läßt sich keiner dieser Fälle denken. 209

174 Die Mengenlehre baut auf einem fiktiven Symbolismus auf, also auf Unsinn. Als gäbe es etwas in der Logik, was wir nicht wissen könnten, was aber gewußt werden kann. — Wenn man sagt (wie Brouwer), daß es im Falle $(x) \cdot \varphi x = \psi x$ außer dem Ja und Nein noch den Fall der Unentscheidbarkeit gibt, so heißt das, daß ›(x) . . .‹ extensiv gemeint ist und alle x eine Eigenschaft zufälligerweise besitzen könnten. 211

175 Wenn man den Ausdruck ›die Wurzel der Gleichung $\varphi x = 0$ ‹ im Russellschen Sinne als eine Beschreibung ansieht, dann

müßte ein Satz, der von der Wurzel der Gleichung $x + 2 = 6$ handelt, einen andern Sinn haben, als einer, der das gleiche von 4 aussagt. 213

176 Wie kann eine bloß interne Allgemeinheit durch das Vorkommen eines einzelnen Falles (also von etwas Extensionalem) widerlegt werden? Aber der besondere Fall widerlegt den allgemeinen Satz von innen heraus — er wendet sich gegen den internen Beweis. — Der Unterschied zwischen den Gleichungen $x^2 = x \cdot x$ und $x^2 = 2x$ ist *nicht* einer der Extension ihrer Richtigkeit. 214

XVI

177 Daß ein Punkt in der Ebene durch ein Zahlenpaar, im dreidimensionalen Raum durch ein Zahlentriplett dargestellt wird, zeigt schon, daß der dargestellte Gegenstand gar nicht der Punkt, sondern das Punktgewebe ist. 216

178 Geometrie als Syntax der Sätze, die von den räumlichen Gegenständen handeln. Das, was im Gesichtsraum angeordnet ist, steht in dieser *Art* von Ordnung a priori, d. h. seiner logischen Natur nach, und die Geometrie ist hier einfach Grammatik. Was der Physiker in der Geometrie des physikalischen Raumes in Beziehung zu einander setzt, sind Instrumentablesungen, die ihrer *internen* Natur nach nicht anders sind, ob wir in einem geraden oder sphärischen Raum leben. 216

179 Ich kann mich jedem Punkt einer Strecke unbegrenzt nähern, indem ich immer diejenige Halbierung vornehme, die der Wurf einer Münze vorschreibt. Kann ich analog die rationalen Zahlen in zwei Klassen teilen, indem ich je nach dem Wurf (Kopf oder Adler) 0 oder 1 in einen endlosen Dualbruch setze? Durch die Vorschrift zu würfeln ist kein Gesetz der Folge beschrieben; und die unendliche Unentschiedenheit bestimmt keine Zahl. 218

180 Ist es möglich, im Gesetz vom Gesetz zu abstrahieren und die Extension als Wesentliches dargestellt zu sehen? — Schneide ich

dort, wo keine rationale Zahl ist, dann muß es Näherungswerte zu diesem Schnitt geben. Aber näher *wem?* Vorläufig habe ich im Gebiet der Zahl nichts, dem ich mich nähern kann. — Alle Punkte einer Strecke können wirklich durch arithmetische Vorschriften dargestellt werden. Beim Approximieren durch fortgesetzte Zweiteilung nähert man sich *jedem* Punkt durch *rationale* Zahlen. 221

XVII

181 Welches Kriterium gibt es dafür, daß die irrationalen Zahlen *komplett* sind? Jede irrationale Zahl läuft einer Reihe rationaler Näherungswerte entlang, verläßt diese Reihe niemals. Wenn ich die Gesamtheit aller irrationalen Zahlen habe außer π , und nun π einsetze, so kann ich keinen Punkt angeben, an dem π nun wirklich nötig wird, es hat an jedem Punkt einen Begleiter. Das zeigt klar, daß die irrationale Zahl nicht die Extension eines unendlichen Dezimalbruchs, sondern ein Gesetz ist. π , wenn es eine Extension wäre, würde uns niemals abgehen — wir könnten niemals eine Lücke bemerken. 223

182 $\sqrt{2}$: eine Regel mit einer Ausnahme. — Die Ziffernregeln müssen erst da sein, dann drückt sich in ihnen — z. B. — eine Wurzel aus. Aber dieser Ausdruck der Ziffernfolge ist nur dadurch von Bedeutung, daß er Ausdruck einer reellen Zahl ist. Wenn man ihn nachträglich ändert, so hat man damit nur den Ausdruck gestört, aber nicht eine neue Zahl gewonnen. 224

183 Wenn $\sqrt{2}$ überhaupt etwas ist, dann dasselbe wie $\sqrt{2}$, nur ein anderer Ausdruck; der Ausdruck in einem andern System. Die $\sqrt{2}$ mißt nicht, ehe sie in einem System ist. Man würde von ihr ebensowenig sagen, sie sei eine Grenze, der die Werte der Reihe zustreben, als man es von der Vorschrift zu würfeln sagen würde. 225

184 Daß man das Gesetz anwenden kann, gilt auch von dem Gesetz, die Ziffern zu würfeln. Und das, was π davon unterscheidet, kann nur darin bestehen, daß wir wissen, es muß ein Gesetz geben, nach welchem die Ziffern 7 in π auftreten, wenn wir

dieses Gesetz auch noch nicht kennen. π' spielt auf ein noch unbekanntes Gesetz an. 227

185 Nur ein Gesetz nähert sich einem Wert. 228

186 Der Buchstabe π steht für ein Gesetz, welches seinen Ort im arithmetischen Raum hat. Während π' sich nicht der arithmetischen Ausdrucksweise bedient, und dem Gesetz darum keinen Platz in diesem Raum anweist. Denn das Ersetzen der 7 durch 3 fügt ja dem Gesetz gar nichts hinzu und ist in diesem System gar keine arithmetische Operation. 228

187 Um eine reelle Zahl zu bestimmen, muß eine Vorschrift *in sich* vollkommen verständlich sein. D. h., es darf nicht wesentlich unentschieden sein, ob ein Teil von ihr zu entbehren wäre. Stimmen die Extensionen zweier Gesetze bis auf weiteres überein, und kann ich die Gesetze als solche nicht vergleichen, so sind die definierten Zahlen unvergleichbar. 230

188 Die Entwicklung von π ist zugleich ein Ausdruck des Wesens von π und des Wesens des Dezimalsystems. Die arithmetischen Operationen gebrauchen das Dezimalsystem nur als Mittel zum Zweck. Sie lassen sich in die Sprache jedes anderen Zahlensystems übersetzen, und haben keines von ihnen zu ihrem Gegenstand. — Eine allgemeine Operationsregel hat ihre Allgemeinheit durch die Allgemeinheit der Veränderung, die sie in den Zahlen hervorbringt. π' macht das Dezimalsystem zu seinem Gegenstand, daher genügt jetzt nicht mehr, daß man die Regel bei der Bildung der Extension anwenden kann. 231

189 Ein Gesetz, bei welchem p die Reihe der ganzen Zahlen durchläuft, mit Ausnahme derer, für die das Fermatsche Gesetz nicht gilt. Bestimmte diese Vorschrift eine reelle Zahl? Die Zahl F will die Spirale . . . benützen und nach einem Prinzip Gänge dieser Spirale auswählen. Aber dieses Prinzip gehört nicht zur Spirale. Es ist schon ein Gesetz da, aber das bezieht sich nicht unmittelbar auf die Zahl. Die Zahl ist gleichsam ein ungesetzmäßiges Nebenprodukt des Gesetzes. 232

190 Es tritt uns hier immer wieder etwas entgegen, was man ›arithmetisches Experiment‹ nennen könnte. So kommen auch die Primzahlen bei der Methode sie zu suchen heraus, als Resultate eines Experiments. Ich sehe wohl ein Gesetz in der Vorschrift, aber nicht in den Zahlen, die dabei herauskommen. 235

191 Die Zahl muß an und für sich messen. Tut sie das nicht, überläßt sie das den rationalen Zahlen, so brauchen wir sie nicht. — Die eigentliche Entwicklung ist das, was der Vergleich mit einer rationalen Zahl aus dem Gesetz hervorruft. 235

192 Die reelle Zahl ist mit der Fiktion einer unendlichen Spirale vergleichbar, Gebilde wie F , P , oder π' dagegen nur mit endlichen Stücken einer Spirale. 237

193 Um die Rationalzahlen mit $\sqrt{2}$ zu vergleichen, muß ich sie quadrieren — Sie nehmen dann die Form \sqrt{a} an, und \sqrt{a} ist hier eine arithmetische Operation. In diesem System hingeschrieben, sind sie mit $\sqrt{2}$ vergleichbar, und es ist mir, als wäre die Spirale zu einem Punkt zusammengeschrumpft. 237

194 Ist ein arithmetisches Experiment noch möglich, wo eine Definition durch Rekursion statthat? Nein, weil durch die Rekursion jede Stufe arithmetisch verständlich wird. 238

195 Es ist nicht möglich zu beweisen, daß a größer ist als b , ohne beweisen zu können, an welcher Stelle der Unterschied zu Tage treten wird. $1,4$ — ist das die Wurzel 2 ? Nein, denn es ist die Wurzel aus $1,96$. D. h., ich kann es sofort als einen Näherungswert von $\sqrt{2}$ hinschreiben. 238

196 Wenn die reelle Zahl eine rationale Zahl a ist, so muß der Vergleich ihres Gesetzes mit a das ergeben. D. h., das Gesetz muß so beschaffen sein, daß es gleichsam in die rationale Zahl einschnappt, wenn es an die entsprechende Stelle kommt. Es ginge

z. B. nicht an, daß man nicht sicher sein könnte, ob $\sqrt{25}$ wirklich bei 5 abbricht. 240

197 Kann ich auch eine solche Spirale eine Zahl nennen, die, for all I know, an einem rationalem Punkt stehen bleiben kann? Es fehlt eine Methode des Vergleichs mit den Rationalzahlen. Es ist keine Methode, ins Unbestimmte hinein zu entwickeln, wenn auch dieses Entwickeln zu einem Resultat des Vergleichs führt. 241

198 Wenn die Frage nach dem Vergleich von F mit einer Rationalzahl keinen Sinn hat, weil alle Entwicklung uns die Antwort noch nicht gegeben hat, dann hat diese Frage auch keinen Sinn, ehe man aufs Geratewohl die Sache durch die Extension zu entscheiden versucht hat. 242

199 Es ist nicht nur notwendig, sagen zu können, ob eine gegebene rationale Zahl die reelle Zahl ist, sondern auch, wie nahe sie ihr möglicherweise kommen kann. Eine Größenordnung des Abstandes. Die Entwicklung im Dezimalsystem gibt mir diese nicht, da ich nie wissen kann, wie viele 9 z. B. einer entwickelten Stelle folgen werden. — ›e ist nicht diese Zahl‹ heißt nichts, sondern man muß sagen, ›es ist mindestens um dieses Intervall von ihr entfernt‹. 243

Anhang: Aus F. Waismanns stenographischen Notizen zum Gespräch vom 30. Dezember 1930 245

XIX

200 Die Negation in der Arithmetik scheint uns nur in Verbindung mit einer Allgemeinheit interessant. — Unteilbarkeit und Ungleichungen — Ich schreibe nicht › $\sim(5 \times 5 = 30)$ ‹ sondern $5 \times 5 \neq 30$, weil ich nichts negieren, sondern eine Beziehung zwischen 5×5 und 30 feststellen will (also etwas Positives). Analog, wenn ich die Teilbarkeit ausschließe, ist das dem Feststellen der Unteilbarkeit äquivalent. 247

201 Es sträubt sich etwas gegen die Anwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik. — Das Suchen nach einem Primzahlgesetz. Man will das negative Kriterium der Primzahl durch ein positives ersetzen — aber diese Negation ist nicht, was sie in der Logik ist, sondern eine Unbestimmtheit. — Die Verneinung einer Gleichung ist so ähnlich und so verschieden von der Verneinung eines Satzes wie die Bejahung der Gleichung von der Bejahung eines Satzes. 248

202 Wo die Negation wesentlich einer Disjunktion entspricht, oder einer Ausschließung eines Teiles einer logischen Reihe zugunsten eines anderen — dort muß sie eins sein mit jenen logischen Formen und also nur scheinbar eine Negation. 249

203 Doch ist, was sich mit Ungleichungen ausdrückt, *wesentlich* verschieden von dem durch Gleichungen Ausgedrückten. So kann man ein Gesetz, das die Stellen eines Dezimalbruchs liefert und mit Ungleichungen arbeitet, gar nicht unmittelbar mit einem vergleichen, welches mit Gleichungen arbeitet. Wir haben hier ganz verschiedene Methoden und daher verschiedene Arten arithmetischer Gebilde. 250

204 Kann man mit Hilfe der Primzahlen eine Irrationalzahl definieren? Soweit man die Primzahlen voraussehen kann, ja, und weiter nicht. 251

XX

205 Kann man sagen, daß der kleinere Fleck einfacher ist als der größere? — Es scheint, als könne man einen einfarbigen Fleck nicht zusammengesetzt sehen. — Das größere *geometrische* Gebilde ist nicht aus kleineren *geometrischen* Gebilden zusammengesetzt. Anders aber ist es im erfüllten Raum. Die ›rein geometrischen Figuren‹ sind ja nur logische Möglichkeiten. 252

206 Ob es einen Sinn hat zu sagen, ›dieser Teil einer gleichmäßig roten Fläche ist rot‹, hängt davon ab, ob es einen abso-

luten Ort gibt. Ich kann die Identität eines Ortes im Gesichtsfeld feststellen, sonst könnte ich nicht unterscheiden, ob ein Fleck immer im gleichen Ort bleibt. Im Gesichtsraum gibt es absolute Lage, absolute Richtungen, und daher absolute Bewegung. Und wenn das nicht so wäre, dann hätte es *keinen Sinn* in diesem Zusammenhang von gleichen oder von verschiedenen Orten zu reden. Das zeigt die Struktur unseres Gesichtsfeldes: denn das Kriterium der Struktur ist, welche Sätze für sie Sinn haben. 253

207 Kann ich sagen: ›Die obere Hälfte meines Gesichtsfeldes ist rot‹? — Es gibt keine Relation des ›Sich-Befindens‹, die zwischen einer Farbe und einem Ort bestünde. 257

208 Es scheint mir, daß der Begriff der Distanz in der Struktur des Gesichtsraumes unmittelbar gegeben ist. Im Gesichtsraum messen. Längengleichheit bei ungleicher Anzahl von Teilen. Kann ich denn sicher sein, daß das, was ich zähle, wirklich die Zahl ist, die ich sehe? 257

209 Wenn man aber nicht sagen kann, daß in a und b eine bestimmte Anzahl von Teilen ist, wie soll ich das Gesichtsfeld dann beschreiben? — ›Verschwommen‹ und ›unklar‹ sind relative Ausdrücke. — Wenn wir wirklich 24 und 25 Teile in a und b *sähen*, dann könnten wir a und b nicht als gleich sehen. Das Wort ›gleich‹ hat auch für den Gesichtsraum eine Bedeutung, die dies zum Widerspruch stempeln würde. 260

210 Es kommt darauf an, gewisse Widersprüche zu erklären, wenn wir auf den Gesichtsraum die Schlußweise des euklidischen Raumes anwenden. Dies kommt z. B. daher, daß wir die Konstruktion nur gliedweise aber nicht als Eines sehen können: daß es keine visuelle Konstruktion gibt, die aus diesen einzelnen visuellen Stücken zusammengesetzt wäre. 261

211 Sobald man exakte Begriffe der Messung auf die unmittelbare Erfahrung anwenden will, stößt man auf eine eigentümliche Verschwommenheit in dieser Erfahrung. — Die Wörter ›ungefähr‹, ›beiläufig‹ etc. haben freilich nur relativen Sinn, aber sie

sind doch nötig und sie charakterisieren die Natur unserer Erfahrung. — Problem des Sandhaufens — Das, was dem Gesichtskreis in der euklidischen Geometrie entspricht, ist nicht ein Kreis, sondern eine Klasse von Figuren. — Hier scheint es, als wäre auch die exakte *Begrenzung* der Unexaktheit unmöglich. Man grenzt aber einen Sumpf durch eine Mauer ab, und die Mauer ist nicht *die* Grenze des Sumpfes. 263

212 Die Korrelation zwischen Gesichtsraum und euklidischem Raum. *Wenn* ein Kreis überhaupt das ist, was wir sehen, dann müssen wir *ihn* sehen können, und nicht bloß etwas ihm Ähnliches. Wenn ich keinen genauen Kreis sehen kann, so kann ich in diesem Sinne auch keinen angenäherten sehen. 264

213 Wir brauchen neue Begriffe, und wir nehmen immer wieder die der physikalischen Sprache. Z. B. ›Genauigkeit‹. Ist es richtig zu sagen, ›ich sehe keine scharfe Linie‹, dann *ist* eine scharfe Linie denkbar. Hat es Sinn zu sagen, ›ich sehe nie einen genauen Kreis‹, dann heißt das: Ein genauer Kreis ist im Gesichtsraum denkbar. — Das Wort ›gleich‹ in ganz verschiedenen Bedeutungen gebraucht. — Beschreibung der Farbflecken in der Nähe des Randes des Gesichtsfeldes. Klar, daß die Undeutlichkeit eine interne Eigenschaft des Gesichtsraumes ist. 266

214 Welche Unterschiede gibt es im Gesichtsraum? Die Tatsache, daß man ein physikalisches Hunderteck als Kreis sieht, sagt nichts über die Möglichkeit, ein Hunderteck zu sehen. — Hat es *Sinn* von einem Gesichtshunderteck zu reden? 268

215 Könnte ich nicht sagen, ›ich sehe vielleicht einen genauen Kreis, kann es aber nie wissen‹? Nur, wenn festgelegt wird, in welchem Fall man eine Messung genauer nennt als eine andere. Es heißt nichts, zu sagen, der Kreis sei nur ein Ideal, dem sich die Wirklichkeit nur nähern könnte. Es kann aber sein, daß wir eine unendliche Möglichkeit selbst den Kreis nennen. Wie mit einer irrationalen Zahl. — Ist nun die Ungenauigkeit der Messung der gleiche Begriff wie die Ungenauigkeit des Gesichtsbildes? Gewiß nicht. — ›Scheint‹ und ›Schein‹ zweideutig: in einem Fall

ist es das Resultat einer Messung, im anderen eine weitere Erscheinung. 269

216 ›Sinnesdatum‹ enthält die Anschauung: Wenn von der ›Erscheinung eines Baumes‹ die Rede ist, so hielten wir entweder etwas für einen Baum, was einer ist, oder etwas, was keiner ist. Dieser Zusammenhang besteht aber nicht. 270

217 *Kann* man versuchen, ›das richtige Abbild des Gesichtsraumes‹ zu geben? Man kann nicht die Verschwommenheit des Phänomens in eine Ungenauigkeit der Zeichnung übersetzen. Daß der Gesichtsraum nicht euklidisch ist, zeigt schon das Vorkommen zweier verschiedener Arten von Linien und Punkten. 271

XXI

218 Einfache Farben — einfach als psychologische Erscheinungen. Ich brauche eine rein phänomenologische Farbenlehre, in der nur von wirklich Wahrnehmbarem die Rede ist und keine hypothetischen Gegenstände — Wellen, Zellen etc. — vorkommen. Kann ich eine Metrik der Farben finden? Hat es einen Sinn zu sagen, daß die eine Farbe, etwa in bezug auf ihren Gehalt an Rot, *in der Mitte* zwischen zwei anderen Farben steht? 273

219 Orange ist ein Gemisch von Rot und Gelb in einem Sinne, in dem Gelb kein Gemisch von Rot und Grün ist, obwohl ja Gelb im Kreis zwischen Rot und Grün liegt. — Wenn ich mir die Mischung zwischen einem Blaugrün und einem Gelbgrün denke, so sehe ich, daß sie ohne weiteres nicht geschehen kann, sondern erst ein Bestandteil gleichsam getötet werden muß. 273

220 Die Bedeutung des Ausdrucks ›Mischung der Farben A und B‹ muß mir allgemein bekannt sein. Sagt man, die Farbe eines Flecks liege zwischen Violett und Rot, so verstehe ich das und kann mir ein rötlicheres Violett als das gegebene denken. Aber: ›Die Farbe liegt zwischen diesem Violett und einem Orange‹? Das Dazwischenliegen der Mischfarben ist hier kein anderes als

das des Rot zwischen Blau und Gelb. — ›Rot und Gelb geben Orange‹ spricht nicht von einer Quantität der Bestandteile. Es heißt nichts, zu sagen, dies Orange und dies Violett enthalten gleichviel Rot. — Der falsche Vergleich der Farbenreihe mit einem System von zwei Gewichten an einem Maßstab. 274

221 Es ist eben hier ganz wie in der Geometrie des Gesichtsraumes, verglichen mit der euklidischen. Es ist hier eine andere Art von Quantitäten als die, welche durch unsere rationalen Zahlen dargestellt werden. — Wenn der Ausdruck ›dazwischen liegen‹ einmal die Mischung zweier einfacher Farben, ein andermal den gemeinsamen einfachen Bestandteil zweier Mischfarben bezeichnet, so ist die Multiplizität seiner Anwendung in jedem Falle eine andere. — Man kann auch alle Farbtöne auf einer geraden Linie anordnen. Aber dann muß man durch Regeln gewisse Übergänge ausschließen, und endlich muß das Bild auf der Geraden die gleiche Art des topologischen Zusammenhangs bekommen wie auf dem Oktaeder. Ganz analog wie das Verhältnis der gewöhnlichen Sprache zu einer ›logisch geklärten‹ Ausdrucksweise. 276

222 Man kann nicht in demselben Sinne sagen, Rot habe einen orangen Stich, wie, Orange habe einen rötlichen Stich. ›x besteht aus y und z‹ und ›x ist der gemeinsame Bestandteil von y und z‹ sind hier nicht vertauschbar. 278

223 Wenn wir kleine Flecken der einen Farbe mit kleinen Flecken der anderen untermischt sehen, so haben wir eine andere Art von Farbenübergang als auf dem Farbenkreis. Nicht, daß experimentell festgestellt wird, daß gewisse Farben so aus anderen entstehen. Denn, ob so ein Übergang *möglich* (oder vorzustellen) sei, ist eine interne Eigenschaft der Farben. 279

224 Die Gefahr, Phänomene einfacher sehen zu wollen, als sie sind. — Eine Kirchentonart verstehen, heißt, etwas Neues hören; analog wie ich 10 Striche, die ich früher nur als 2 mal 5 Striche habe sehen können, plötzlich als ein charakteristisches Ganzes sehe. 281

225 Der Satz, die Hypothese, ist mit der Wirklichkeit gekuppelt, und mehr oder weniger lose. Alles Wesentliche ist, daß die Zeichen sich am Schluß doch auf die unmittelbare Erfahrung beziehen und nicht auf ein Mittelglied (ein Ding an sich). Ein Satz, so aufgefaßt, daß er unkontrollierbar wahr oder falsch sein kann, ist von der Realität abgelöst und funktioniert nicht mehr als Satz. 282

226 Die Hypothese ist ein Symbol, wofür gewisse Regeln der Darstellung gelten. Die Wahl der Darstellung ist ein Vorgang, der auf der sogenannten Induktion (nicht der mathematischen) beruht. 283

227 Man gibt die Hypothese nur um einen immer höheren Preis auf. Die Frage nach der Einfachheit der Darstellung durch eine bestimmte Hypothese, hängt mit der Frage der Wahrscheinlichkeit zusammen. 284

228 Das Wesen einer Hypothese ist, daß sie eine Erwartung erzeugt, d. h., daß ihre Bestätigung nie abgeschlossen ist. Sie hat zur Wirklichkeit eben eine andere formelle Relation als die der Verifikation. — Das Glauben an die Gleichförmigkeit des Geschehens. — Eine Hypothese ist ein Gesetz zur Bildung von Sätzen. 285

229 Die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese hat ihr Maß darin, wieviel Evidenz nötig ist, um es vorteilhaft zu machen, sie umzustoßen. Sage ich: Ich nehme an, daß morgen die Sonne wieder aufgehen wird, weil das Gegenteil zu unwahrscheinlich ist, so meine ich hier mit ›wahrscheinlich‹ oder ›unwahrscheinlich‹ etwas anderes, als in ›es ist gleich wahrscheinlich, daß ich Kopf oder Adler werfe‹. — Die Erwartung muß *jetzt* Sinn haben; d. h., ich muß sie auch mit dem gegenwärtigen Stand vergleichen können. 286

230 Die Beschreibung der Phänomene mittels der Hypothese

der Körperwelt, verglichen mit einer phänomenologischen Beschreibung. — So stellt die Relativitätstheorie nicht die logische Mannigfaltigkeit der Phänomene selbst dar, sondern die Mannigfaltigkeit der beobachteten Regelmäßigkeiten. Diese Mannigfaltigkeit entspricht nicht *einer* Verifikation, sondern einem Gesetz, welchem Verifikationen gehorchen. 286

231 Hypothese und Postulat. Keine denkbare Erfahrung kann ein Postulat widerlegen, wenn es auch äußerst unbequem sein mag, an ihm zu halten. Dieser größeren oder geringeren Bequemlichkeit entsprechend, gibt es eine größere oder geringere Wahrscheinlichkeit des Postulats. Von einem Maß dieser Wahrscheinlichkeit zu reden, ist sinnlos. 288

232 Wenn ich sage ›das wird wahrscheinlich eintreffen‹, so wird dies weder durch das Eintreffen verifiziert noch durch das Nicht-eintreffen falsifiziert. Streiten wir darüber, ob es wahrscheinlich sei oder nicht, so werden wir nur Argumente aus der Vergangenheit heranziehen. — Es ist immer, als könnte derselbe Sachverhalt durch Erfahrung bestätigt werden, dessen Bestehen a priori einleuchtet. Aber das ist Unsinn. Stimmt die Erfahrung mit der Berechnung überein, so heißt das, die Erfahrung habe meine Berechnung gerechtfertigt — nicht das an ihr, was a priori ist, sondern die Grundlagen, die a posteriori sind: gewisse Naturgesetze. Im Falle des Würfels stellt sich das Naturgesetz so dar, daß die Wahrscheinlichkeit, daß die einzelnen Flächen oben zu liegen kommen, für alle sechs die gleiche ist. Dieses Gesetz ist es, was wir überprüfen. 289

233 Gewisse mögliche Ereignisse müssen dem Gesetz, wenn es überhaupt eines sein soll, widersprechen; und treten diese ein, so müssen sie durch ein anderes Gesetz erklärt werden. — Es liegt in der Voraussage, daß eine gleichmäßige Verteilung der Fall sein wird, eine Annahme über jene Naturgesetze, die ich nicht genau kenne. 290

234 Jemand, der täglich würfelt und eine Woche lang nur Einer wirft — und zwar nicht darum, weil die Würfel schlecht sind.

Hat er Grund zu denken, daß hier ein Naturgesetz waltet, das ihn immer Einser werfen läßt? — Wenn sich die Versicherungsgesellschaft nach der Wahrscheinlichkeit richtet, so richtet sie sich nicht nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung, sondern nach einer tatsächlichen beobachteten Häufigkeit. 291

235 Die ›Gerade mit Abweichungen‹ ist nur eine Form der Beschreibung. Wenn ich behaupte ›das ist die Regel‹, so hat das nur so lange Sinn, als ich bestimmt habe, wie viele Ausnahmen von der Regel ich maximal zulasse, ohne die Regel umzustoßen. 292

236 Nur von dem wirklich gesehenen Stück hat es Sinn zu sagen, es mache den allgemeinen Eindruck einer Geraden, und nicht von einem hypothetisch angenommenen. Das Experiment des Würfels kann nur die Erwartung begründen, daß es nun so weitergehen wird. 293

237 Alle ›begründete‹ Erwartung ist Erwartung, daß eine bis jetzt beobachtete Regel weiter gelten wird. Die Regel muß aber selbst beobachtet worden sein, und kann nicht selbst wieder bloß erwartet werden. — Die Wahrscheinlichkeit hat es mit der Form und einem Standard der Erwartung zu tun. 294

238 Ein Lichtstrahl trifft zwei ungleiche Strecken. Der Mittelpunkt jeder Strecke scheint sie in gleich-wahrscheinliche Möglichkeiten zu teilen. Dann gibt es, anscheinend, einander widersprechende Wahrscheinlichkeiten. Aber die Annahme der Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Eintreffens wird durch einen Häufigkeitsversuch verifiziert; und wenn bestätigt, so erweist sie sich als eine *physikalische* Hypothese. Die geometrische Konstruktion zeigt nur, daß die Gleichheit der Teilstrecken *kein* Grund zur Annahme gleicher Wahrscheinlichkeit war. Ich kann ein Gesetz willkürlich aufstellen, z. B., daß gleiche Länge der Teile gleiche Wahrscheinlichkeit bedingt; aber auch jedes andere Gesetz ist gleichermaßen erlaubt. Ebenso in weiteren Beispielen. Aus Erfahrung bestimmen wir diese Möglichkeiten als gleich wahrscheinlich. Aber die Logik gibt dieser Bestimmung keinen Vorzug. 295

Anhang

Komplex und Tatsache	301
Der Begriff der Unendlichkeit in der Mathematik	304
<i>Anmerkung des Herausgebers</i>	347