

Teil I

1-5. Das Problem des Regelfolgens. (Vgl. »Philosophische Untersuchungen« §§ 189, 190, etc.) – Übergänge durch eine Formel bestimmt (1-2). Fortsetzung einer Reihe (3). Unerbittlichkeit der Mathematik; Mathematik und Wahrheit (4-5). Bemerkung über das Messen (5). 35

6-23. Das logische Schließen. – Das Wort »alle«; der Schluß aus $\exists(x).fx$ auf $\exists fa$ (10-16). Schließen und Wahrheit (17-23). 39

24-74. Der Beweis. – Der Beweis als Figur oder Muster, Paradigma. Hand-und-Drudenfuß-Beispiel (25, etc.). Der Beweis als Bild eines Experiments (36). Das 100-Kugeln-Beispiel (36, etc.). Zusammenlegen von Figuren aus Teilen (42-72). Die mathematische Überraschung. Beweis und Überzeugung. Mathematik und Wesen (32, 73, 74). Die *Tiefe* des Wesens: das tiefe Bedürfnis nach der Übereinkunft (74). 46

75-105. Rechnung und Experiment. – Das »Entfalten« von mathematischen Eigenschaften. Das 100-Kugeln-Beispiel (75, 86, 88). Entfalten von Eigenschaften eines Vielecks (76), einer Kette (79, 80, 91, 92). Messen (93, 94). Geometrische Beispiele (96 bis 98). Interne Eigenschaften und Relationen (102-105); farbenlogische Beispiele. 65

106-112. Der mathematische Glaube. 76

113-142. Der logische Zwang. – Inwiefern ist das logische Argument ein Zwang? (113-117). Die Unerbittlichkeit der Logik mit der des Gesetzes verglichen (118). Die »logische Maschine« und die Kinematik starrer Körper (119-125). »Die Härte des logischen Muß« (121). Die Maschine als Symbol für ihre Wirkungsweise (122). Die Verwendung eines Wortes mit

einem Schlag erfassen (123-130). Die Möglichkeit als Schatten der Wirklichkeit (125). Die unverstandene Verwendung des Wortes als seltsamer Vorgang gedeutet (127). (Zu 122-130 vgl. »Philosophische Untersuchungen« §§ 191-197.) Die Gesetze der Logik als »Denkgesetze« (131-133). Sich in einer Rechnung irren (136-137). Bemerkung über Messen (140). Logische Unmöglichkeit (141). »Was wir liefern, sind eigentlich Bemerkungen zur Naturgeschichte des Menschen« (142). 79

143-156. Begründung eines Rechenvorgangs und eines logischen Schlusses. – Rechnen ohne Sätze (143-145). Das Holzverkaufen-Beispiel (143-152). »Sind unsre Schlußgesetze ewig und unveränderlich?« (155). Die Logik ist *vor* der Wahrheit (156). 92

157-170. Mathematik, Logik und Erfahrung. – Beweis und Experiment (157-169). Was an der Mathematik Logik ist: sie bewegt sich in den Regeln unserer Sprache (165). Der Mathematiker ist ein Erfinder, kein Entdecker (168). Die Gründe des logischen Muß (169-171). 96

Anhang I

1-7. Zwei Arten der Verneinung: eine, die sich selber aufhebt, und eine, die Verneinung verbleibt, wenn sie wiederholt wird. Wie man in der doppelten Verneinung die eine oder die andere Art *meint*. Die Meinung durch den Ausdruck der Meinung geprüft (3). Verneinung mit der Drehung um 180° in der Geometrie verglichen (1, 6, 7). 102

8-10. Wir können uns eine »primitivere« Logik denken, in der nur Sätze, die keine Verneinung enthalten, verneint werden können (8). Die Frage, ob für diese Menschen die Verneinung dieselbe Bedeutung hat wie für uns (9). Meint man dasselbe mit den beiden Einsern in »dieser Stab ist 1 m lang« und »hier steht 1 Soldat« (10)? 105

12-13. Zwei Systeme der Längenmessung. 1 Fuß = 1 W, aber 2 W = 4 Fuß, usw. Haben »W« und »Fuß« dieselbe Bedeutung? 106

16. Die Meinung als *Funktion* des Wortes im Satze. 107

17-27. Gebrauch des Wortes »ist« als Kopula und als Gleichheits-Zeichen. Die Personalunion durch das gleiche Wort bloßer Zufall. Wesentliche und unwesentliche Züge einer Notation. Vergleich mit der Rolle einer Figur im Spiel. Ein Spiel hat nicht nur Regeln, sondern auch einen Witz (20). 108

Anhang II

1-13. Das Überraschende kann in der Mathematik zweierlei völlig verschiedene Rollen spielen. – Ein Sachverhalt kann durch die Art seiner Darstellung erstaunlich erscheinen. Oder das Herauskommen eines bestimmten Resultats kann als an sich überraschend angesehen werden.

Die zweite Art des Überraschtseins nicht legitim. Kritik der Auffassung, daß die mathematische Demonstration etwas Verborgenes ans Licht bringt (2). »Hier ist kein Geheimnis« heißt: Schau dich doch um! (4). Eine Rechnung mit einer Art Kartenaufschlagen verglichen (5). Wenn ein Überblick uns fehlt über das, was wir gemacht haben, kommt es uns geheimnisvoll vor. Wir nehmen eine bestimmte Ausdrucksform hin und werden von ihr in unserem Handeln und Denken beherrscht (8). 111

Anhang III

1-4. Arten der Sätze. – Arithmetik ohne Sätze betrieben (4). 116

5-7. Wahrheit und Beweisbarkeit im System der »Principia Mathematica«. 117

8-19. Diskussion eines Satzes »P«, der seine eigene Unbe-

weisbarkeit im System der »Principia Mathematica« behauptet.
– Rolle des Widerspruchs im Sprachspiel (11-14, 17). 118

20. Die Sätze der Logik. »Satz« und »satzartiges Gebilde«. 123

Teil II

1-22. (»Ansätze«). – Das Diagonalverfahren. Wozu kann man die Diagonalzahln brauchen? (3). »Es heißt hier immer: Blicke weiter um dich!« (6). Das Resultat einer Rechnung, in der Wortsprache ausgedrückt, ist mit Mißtrauen zu betrachten (7). Der Begriff »unabzählbar« (10-13). Vergleich der Begriffe der reellen Zahl und der Kardinalzahl unter dem Gesichtspunkte des Ordens in eine Reihe (16-22). 125

23. Die Krankheit einer Zeit. 132

24-27. Diskussion des Satzes: »Es gibt keine größte Kardinalzahl«. »Von einer *Erlaubnis* sagen wir, sie habe kein Ende« (26). 133

28-34. Irrationalzahlen. Es gibt kein System der Irrationalzahlen (33), aber Cantor definiert eine *Verschiedenheit höherer Ordnung*, nämlich eine Verschiedenheit einer Entwicklung von einem System von Entwicklungen (34). 133

35-39. \aleph_0 . Daraus, daß wir Verwendung für eine Art von Zahlwort haben, welches die Anzahl der Glieder einer endlosen Reihe angibt, folgt nicht daß es auch irgend einen Sinn hat von der Anzahl des Begriffes »endlose Folge« zu reden. Es gibt keine grammatische Technik, die die Verwendung so eines Ausdrucks nahelegte. Solch eine Verwendung ist nicht: noch zu entdecken, sondern: erst zu *erfinden* (38). 135

40-48. Diskussion des Satzes: »Man kann die Brüche nicht ihrer Größe nach in eine Reihe ordnen«. 137

- 49-50. Wie vergleicht man Spiele? 139
- 51-57. Diskussion des Satzes, daß die Brüche (Zahlenpaare) in eine unendliche Reihe geordnet werden können. 139
- 58-60. »Soll man das Wort ›unendlich‹ in der Mathematik vermeiden?«. 141
61. Finitismus und Behaviourismus sind ähnliche Richtungen. Beide leugnen die Existenz von etwas zu dem Zweck um aus einer Verwirrung zu entkommen. 142
62. »Was ich tue ist nicht Rechnungen als falsch zu erweisen; sondern das *Interesse* von Rechnungen einer Prüfung zu unterziehen.« 142

Teil III

- 1-2. Der Beweis. – Der mathematische Beweis muß übersichtlich sein. Rolle der Definitionen (2). 143
- 3-8. Russells Logik und die Idee von der Zurückführung der Arithmetik auf symbolische Logik. – Die Anwendung der Rechnung muß für sich selber sorgen (4). Beweis im Russell-Kalkül, im Dezimalkalkül, und im Einserkalkül. 144
- 9-11. Der Beweis. – Der Beweis als einprägsames Bild (9). Die Reproduktion einer Beweisfigur (10-11). 149
- 12-20. Russells Logik und das Problem von dem Verhältnis verschiedener Rechentechniken zu einander. – Was ist die Erfindung des Dezimalsystems? (12). Beweis im Russell-Kalkül und im Dezimalsystem (13). Übersehbare und unübersehbare Zahlzeichen (16). Verhältnis von gekürzten und ungekürzten Rechentechniken zu einander (17-20). 151
- 21-44. Der Beweis. – Identität und Reproduzierbarkeit eines

Beweises (21). Der Beweis als Vorbild; Beweis und Experiment (22-24). Beweis und mathematische Überzeugung (25-26). Im Beweis haben wir uns zu einer Entscheidung durchgerungen (27). Der bewiesene Satz als Regel. Er soll uns zeigen was zu sagen *Sinn* hat (28). Die Sätze der Mathematik als ›Instrumente der Sprache‹ (29). Das mathematische Muß: eine Gleise in der Sprache gelegt (30). Der Beweis führt einen neuen Begriff ein (31). Welchen Begriff schafft › $p \supset p$ ‹? › $p \supset p$ ‹ als Angelpunkt der sprachlichen Darstellungsweise (32-33). Der Beweis als Teil einer Institution (36). Bedeutung des Unterschieds von Sinnbestimmung und Sinnverwendung (37). Anerkennung eines Beweises; die ›geometrische‹ Auffassung des Beweises (38-40). Der Beweis als Bekenntnis zu einer bestimmten Zeichenverwendung (41). »Der Beweis muß ein anschaulicher Vorgang sein« (42). »Die Logik als Grundlage aller Mathematik tut's schon darum nicht, weil die Beweiskraft der logischen Beweise mit ihrer geometrischen Beweiskraft steht und fällt« (43). In der Mathematik können wir den logischen Beweisen entlaufen (44). 158

45-64. Russells Logik. – Verhältnis der gewöhnlichen Beweistechnik zu der Russellschen (45). Kritik der Auffassung von der Logik als ›Grundlage‹ der Mathematik. Die Mathematik ist ein *buntes Gemisch* von Rechentechniken. Die abgekürzte Technik als neuer Aspekt der unabgekürzten (46-48). Bemerkung zur Trigonometrie (50). Die Dezimalnotation ist unabhängig von dem Rechnen mit Einerstrichen (51). Warum Russells Logik uns nicht *dividieren* lehrt (52). Warum die Mathematik nicht Logik ist (53). Der rekursive Beweis (54). Beweis und Experiment (55). Das Entsprechen verschiedener Kalküle; Strichnotation und Dezimalnotation (56-57). Mehrere Beweise eines und desselben Satzes; Beweis und Sinn eines mathematischen Satzes (58-62). Die *genaue* Entsprechung eines überzeugenden Übergangs in der Musik und in der Mathematik (63). 175

65-76. Rechnung und Experiment. – Sind die Sätze der Mathematik anthropologische Sätze? (65). Mathematische Sätze als Prophezeiungen von übereinstimmenden Rechenresultaten aufgefaßt (66). Zum Phänomen des Rechnens gehört Überein-

stimmung (67). Wenn eine Rechnung ein Experiment ist, was ist dann ein Fehler in der Rechnung? (68). Die Rechnung als Experiment und als *Weg* (69). Ein Beweis dient der Verständigung. Ein Experiment setzt sie voraus (71). Mathematik und die Wissenschaft von den konditionierten Rechenreflexen (72). Der Begriff des Rechnens schließt Verwirrung aus (75-76). 192

77-90. Der Widerspruch. – Ein Spiel, in dem, wer anfängt, immer gewinnen muß (77). Rechnen mit $(a-a)$. Die Abgründe in einem Kalkül sind nicht da, wenn ich sie nicht sehe (78). Diskussion des heterologischen Paradoxes (79). Der Widerspruch vom Standpunkt des Sprachspiels betrachtet. Der Widerspruch als ›heimliche Krankheit‹ des Kalküls (80). Widerspruch und Brauchbarkeit eines Kalküls (81). Der Widerspruchsfreiheitsbeweis und der Mißbrauch der Idee der *mechanischen* Sicherung gegen den Widerspruch (82-89). »Mein Ziel ist, die *Einstellung* zum Widerspruch und zum Beweis der Widerspruchsfreiheit zu ändern« (82). Die Rolle des Satzes: »Ich muß mich verrechnet haben« – der Schlüssel zum Verständnis der ›Grundlagen‹ der Mathematik (90). 202

Teil IV

1-7. Über Axiome. – Das Einleuchten der Axiome (1-3). Einleuchten und Verwendung (2-3). Axiom und Erfahrungssatz (4-5). Die Negation eines Axioms (5). Der mathematische Satz steht auf vier Füßen, nicht auf dreien (7). 223

8-9. Regelfolgen. – Beschreibung mit Hilfe einer Regel (8). 227

10. Die arithmetische Annahme ist nicht an der Erfahrung gebunden. 229

11-13. Die Auffassung der Arithmetik als Naturgeschichte der Zahlen. – Die Beurteilung der Erfahrung mittels des Bildes (12). 229

14. Beziehung des logischen (mathematischen) Satzes nach außen.	231
15-19. Die Möglichkeit angewandte Mathematik ohne reine Mathematik zu treiben. – Mathematik muß nicht in <i>Sätzen</i> getrieben werden; der Schwerpunkt kann ganz im <i>Tun</i> liegen (15). Das kommutative Gesetz als Beispiel (16-17).	232
20. Das Rechnen als maschinelle Tätigkeit.	234
21. Das Bild als Beweis.	235
22-27. Intuition.	235
26. Was ist der Unterschied zwischen <i>nicht</i> Rechnen und <i>falsch</i> Rechnen?	236
29-33. Beweis und mathematische Begriffsbildung. – Der Beweis ändert die Begriffsbildung. Die Begriffsbildung als Grenze der Empirie (29). Der Beweis <i>zwingt</i> nicht, sondern <i>führt</i> (30). Der Beweis leitet unsere Erfahrungen in bestimmte Kanäle (31, 33). Beweis und Vorhersage (33).	237
34. Das philosophische Problem ist: Wie können wir die Wahrheit sagen, und dabei diese starken Vorurteile <i>beruhigen</i> ?	242
35-36. Der mathematische Satz. – Wir erkennen ihn an, <i>indem</i> wir ihm den Rücken drehen (35). Die Wirkung des Beweises: man stürzt sich in die neue Regel hinein (36).	243
39-42. Synthetischer Charakter der mathematischen Sätze. – Die Verteilung der Primzahlen als Beispiel (42).	245
40. Das Resultat als Äquivalent der Operation gesetzt.	245
41. Daß der Beweis übersichtlich sein muß, heißt, daß Kausalität im Beweise keine Rolle spielt.	246

- 43-44. Intuition in der Mathematik. 246
47. Der mathematische Satz als Begriffsbestimmung, die auf die Entdeckung einer neuen Form folgt. 248
48. Das Arbeiten der mathematischen Maschine ist nur das *Bild* des Arbeitens einer Maschine. 249
49. Das Bild als Beweis. 249
- 50-51. Das Umkehren eines Wortes. 250
- 52-53. Mathematischer Satz und Erfahrungssatz. – Die Annahme eines mathematischen Begriffes drückt die sichere Erwartung gewisser Erfahrungen aus; aber die Festsetzung dieses Maßes ist dem Aussprechen der Erwartungen nicht äquivalent (53). 253
- 55-60. Der Widerspruch. – Der Lügner (58). Der Widerspruch als etwas Über-propositionales aufgefaßt, als Denkmal mit einem Januskopf über den Sätzen der Logik thronend (59). 254

Teil V

- 1-4. Die Mathematik als Spiel und als maschinenhafte Tätigkeit. – Rechnet die Rechenmaschine? (2). Wieweit muß man einen Begriff vom ›Satz‹ haben, um die Russellsche mathematische Logik zu verstehen? (4). 257
- 5-8. Tut ein Mißverständnis, die mögliche Anwendung der Mathematik betreffend, der Rechnung als einem Teil der Mathematik Eintrag? – Mengenlehre (7). 259
- 9-13. Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik. – Wo kein Entscheidungsgrund vorliegt, muß er erst erfunden werden, um der Anwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten einen Sinn zu geben. 266

- 14-16 und 21-23. »Alchemie« des Unendlichkeitsbegriffes und anderer mathematischen Begriffen mit unverstandenen Anwendungen. – Unendliche Vorhersagungen (23). 272
- 17-20. Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Der mathematische Satz als Gebot. Mathematische Existenz. 275
- 24-27. Existenzbeweis in der Mathematik. – »Der unheilvolle Einbruch der Logik in die Mathematik« (24; siehe auch 46 u. 48). Das mathematisch Allgemeine steht zum mathematisch Besonderen nicht in dem Verhältnis wie sonst das Allgemeine zum Besonderen (25). Existenzbeweise die keine Konstruktion des Existierenden zulassen (26-27). 281
28. Der Beweis durch *reductio ad absurdum*. 285
- 29-40. Vom Extensionalen und Intensionalen in der Mathematik; der Dedekind-Schnitt. – Die geometrische Illustration der Analysis (29). Dedekinds Satz ohne Irrationalzahlen (30). Wie kommt dieser Satz zu einem tiefen Inhalt? (31). Das Bild der Zahlengeraden (32, 37). Diskussion des Begriffs des Schnittes (33-34). Die Allgemeinheit der Funktionen eine ungeordnete Allgemeinheit (38). Diskussion des mathematischen Funktionsbegriffs; Extension und Intension in der Analysis (39-40). 285
41. Begriffe die in »notwendigen« Sätzen vorkommen, müssen auch in nicht notwendigen eine Bedeutung haben. 295
- 42-46. Vom Beweis und Verstehen des mathematischen Satzes. – Der Beweis als *Bewegung* von einem Begriff zum andern aufgefaßt (42). Einen mathematischen Satz verstehen (45-46). Der Beweis führt einen neuen Begriff ein. Der Beweis soll mich von etwas überzeugen (45). Existenzbeweis und Konstruktion (46). 295
47. Ein Begriff ist nicht wesentlich ein Prädikat. 299

48. Die ›mathematische Logik‹ hat das Denken von Mathematikern und Philosophen gänzlich verblendet. 300
49. Das Zahlzeichen gehört zu einem Begriffszeichen und ist nur mit diesem ein Maß. 300
50. Vom Begriff der Allgemeinheit.
51. Der Beweis zeigt, *wie* das Resultat sich ergibt. 300
- 52-53. Allgemeine Bemerkungen. – Der Philosoph ist der, der in sich viele Krankheiten des Verstandes heilen muß, ehe er zu den Notionen des gesunden Menschenverstandes kommen kann (53). 301

Teil VI

1. Die Beweise ordnen die Sätze. 303
2. Der Beweis ist eine formale Prüfung nur innerhalb einer *Technik* des Transformierens. Die Addition gewisser Zahlen nennt man eine formale Prüfung der Zahlzeichen, aber doch nur, wenn das Addieren eine praktizierte Technik ist. – Der Beweis hängt auch mit der Anwendung zusammen. 303
3. Wenn der Satz in der Anwendung nicht zu stimmen scheint, so muß mir der Beweis zeigen, warum und wie er stimmen muß. 305
4. Der Beweis zeigt wie, und daher warum die Regel – z. B., daß $8 \times 9 = 72$ ergibt – benützt werden kann. 305
5. Das Seltsame ist, daß das Bild, nicht die Wirklichkeit, einen Satz soll erweisen können. 306
6. Der euklidische Beweis lehrt uns eine Technik, eine Primzahl zwischen p und $p! + 1$ zu finden. Und wir werden überzeugt, daß diese Technik immer zu einer Primzahl $> p$ führen muß. 307

7. Der Zuschauer sieht den eindrucksvollen Vorgang, und berichtet: »Ich habe eingesehen, daß es so sein muß.« – Dieses »muß« zeigt, welche Art von Lehre er aus der Szene gezogen hat. 308
8. Dieses Muß zeigt, daß er einen Begriff angenommen hat, d. h. eine Methode; im Gegensatz zu der Anwendung der Methode. 309
9. »Zeig mir, wie 3 und 2 5 ergeben.« Kind und Abakus. – Man würde jenen Menschen »wie« fragen, den man zeigen lassen will, daß er versteht, wovon hier die Rede ist. 310
10. »Zeig mir wie...« im Unterschied von »Zeig mir, daß...« 312
11. Der Beweis des Satzes erwähnt nicht das ganze Rechnungsverfahren, das hinter dem Satz steht und ihm seinen Sinn gibt. 313
12. Das Gebiet der philosophischen Aufgaben. 314
13. Sollen wir sagen, die Mathematiker verstehen den Fermatschen Satz nicht? 314
14. Was wäre das, »zeigen wie es unendlich viele Primzahlen gibt«? 315
15. Der Vorgang des Kopierens. Der Vorgang des Konstruierens nach einer Regel. Muß einer einen klaren Begriff davon haben, ob seine Voraussage mathematisch oder anders gemeint ist? 316
16. Der unerbittliche Satz ist, daß nach dieser Regel diese Zahl auf diese folgt. Das Resultat der Operation wird hier zum Kriterium dafür, daß diese Operation ausgeführt ist. Wir können also jetzt in neuem Sinne beurteilen, ob jemand der Regel gefolgt ist. 318

17. Das Lernen einer Regel. – »Er soll immer so weiter gehen, wie ich es ihm gezeigt habe.« – Was ich unter »gleichmäßig« verstehe, würde ich durch Beispiele erklären. 320
18. Hier nützen mir die Definitionen nichts. 321
19. Die Regel paraphrasieren, macht sie nur für den verständlicher, der schon diesen Paraphrasen folgen kann. 321
20. Einem das Multiplizieren beibringen: verschiedene Multiplikationsbilder mit dem gleichen Ansatz weisen wir zurück. 322
21. Es wäre Unsinn, zu sagen: einmal in der Geschichte der Welt sei jemand einer Regel gefolgt. – Es bricht kein Streit darüber aus, ob der Regel gemäß vorgegangen wurde oder nicht. – Das gehört zu dem Gerüst, von dem aus unsere Sprache eine Beschreibung gibt, zum Beispiel. 322
22. Als hätten wir den Erfahrungssatz zur Regel verhärtet, womit nun die Erfahrung verglichen und beurteilt wird. 324
23. Beim Rechnen kommt es darauf an, ob richtig oder falsch gerechnet wird. – Der arithmetische Satz ist der Kontrolle durch die Erfahrung entzogen. 324
24. »Wenn ich der Regel folge, so kann ich von dieser Zahl nur zu dieser kommen.« So handle ich; frage nach keinem Grunde! 326
25. Wie, wenn einer die Multiplikationstafeln, Logarithmentafeln etc. nachrechnete, weil er ihnen nicht traute? – Macht es einen Unterschied, ob wir den Rechensatz als Erfahrungssatz oder als Regel aussprechen? 327
26. »Nach der Regel, die *ich* in dieser Folge sehe, geht es so weiter.« Nicht: erfahrungsgemäß! Sondern, das ist eben der Sinn der Regel. 327

27. Wenn ich eine Regel in der Folge sehe – kann es darin bestehen, daß ich einen algebraischen Ausdruck vor mir sehe? Muß der nicht einer Sprache angehören? 328

28. Die Sicherheit mit der ich die Farbe »rot« benenne, ist bei meiner Beschreibung nicht in Zweifel zu ziehen. Dies charakterisiert eben, was wir beschreiben nennen. – Das Folgen nach der Regel ist am *Grunde* unseres Sprachspiels.

Weil *das* (z. B., $25^2 = 625$) der Vorgang ist, auf dem wir alles Urteilen aufbauen. 329

29. Gesetz, und der Erfahrungssatz, daß wir dieses Gesetz geben. – »Wenn ich dem Befehl folge, tue ich *dies!*« heißt nicht: wenn ich dem Befehl folge, folge ich dem Befehl. Ich muß also für dieses »*dies*« eine andere Identifizierung haben. 330

30. Wenn die so erzogenen Menschen ohnehin so rechnen, wozu braucht man das Gesetz?

» $25^2 = 625$ « heißt nicht, daß die Menschen so rechnen, denn $25^2 \neq 625$ wäre nicht der Satz, daß die Menschen nicht dies sondern ein andres Resultat erhalten.

»Wende die Regel auf jene Zahlen an!« – Wenn ich ihr folgen will, habe ich noch eine Wahl? 332

31. Wie weit kann man die Funktion der Regel beschreiben? Wer noch keine beherrscht, den kann ich nur abrichten. Aber wie kann ich mir selbst das Wesen der Regel erklären? 333

32. Welche Umgebung bedarf es, daß Einer das Schachspiel (z. B.) erfinden kann?

Ist Regelmäßigkeit möglich *ohne* Wiederholung?

Nicht: wie oft muß er richtig gerechnet haben, um *Anderen* zu beweisen, er könne rechnen, sondern: um es sich selbst zu beweisen. 334

33. Können wir uns denken, daß jemand wüßte, er könne rechnen, obwohl er nie gerechnet hat? 335

34. Um das Phänomen der Sprache zu beschreiben, muß man eine Praxis beschreiben.

Ein Land, das zwei Minuten lang existiert, und das Abbild eines Teiles von England ist, mit alldem was in zwei Minuten vorgeht. Einer tut das, was ein Mathematiker in England tut, der gerade berechnet. Rechnet dieser Zwei-Minuten-Mensch? 335

35. Wie weiß ich, daß diese Farbe »grün« heißt? Wenn ich andere Leute fragte und sie mit mir nicht übereinstimmten, würde ich gänzlich verwirrt sein und sie oder mich für verrückt halten. Mit diesem Wort (»grün«) reagiere ich hier; und so weiß ich auch, wie ich die Regel nun zu befolgen habe.

Wie ein Kräftepolygon, den gegebenen Pfeilen gemäß, gezeichnet wird. 336

36. »Das Wort OBEN hat vier Laute.« – Macht einer, der die Buchstaben zählt, ein Experiment? Es kann eins sein.

Vergleiche: 1) Das Wort, welches dort steht, hat 7 Laute.

2) Das Laitbild »Dädalus« hat 7 Laute.

Der zweite Satz ist zeitlos. Die Verwendung der beiden Sätze muß verschieden sein.

»Durch Abzählen der Laute kann man einen Erfahrungssatz bekommen – oder auch, eine Regel.« 338

37. Definitionen – neue Zusammengehörigkeiten. 340

38. »Wie kann man einer Regel folgen?« – Wir mißverstehen hier die Tatsachen, die uns vor Augen liegen. 341

39. Es ist wichtig, daß die ungeheure Mehrzahl von uns in gewissen Dingen übereinstimmt.

Sprachen verschiedener Stämme, die alle den gleichen Wortschatz hätten, aber die Bedeutungen der Wörter wären verschieden. – Um sich miteinander zu verständigen, mußten die Menschen über die Bedeutungen übereinstimmen – nicht nur über Definitionen, sondern auch in Urteilen. 342

40. Die Versuchung, zu denken: »Ich kann das Sprachspiel (2)

nicht verstehen, weil die Erklärung nur in Beispielen der Anwendung besteht.« 343

41. Ein Höhlenmensch, der für sich selbst regelmäßige Zeichenfolgen hervorbringt. Wir sagen nicht, er handle regelmäßig, oder daß er dem allgemeinen Ausdruck einer Regel folge. 344

42. Unter was für Umständen würden wir sagen: durch das Hinschreiben dieser Figur gebe jemand eine Regel? Unter was für Umständen: einer folge dieser Regel, indem er eine Reihe solcher Figuren zeichnet? 345

43. Nur in einer bestimmten Technik des Handelns, Sprechens, Denkens, kann einer sich vornehmen. (Dieses ›kann‹ ist das grammatische.) 345

44. Zwei Vorgänge: 1) nach einem algebraischen Ausdruck, Zahl auf Zahl der Reihe nach ableiten;
2) der Vorgang: beim Anschauen eines gewissen Zeichens, fällt jemand eine Ziffer ein; wenn er wieder auf das Zeichen und die Ziffer schaut, fällt ihm wieder eine Ziffer ein, usf.

Das Handeln nach einer Regel setzt eine *Gleichmäßigkeit* voraus. 347

45. Der Unterricht im Handeln nach einer Regel. Die Wirkung des »usw.« wird sein, daß wir fast alle gleich zählen und gleich rechnen. Nur dann hat es Sinn, »und so weiter« zu sagen, wenn der Andre ebenso fortsetzt wie ich. 348

46. Was herauskommen *muß* ist eine Urteilsgrundlage, die ich nicht antaste. 350

47. Ist es nicht genug, daß diese Sicherheit existiert? Wozu soll ich eine Quelle für sie suchen? 350

48. Wie wir das Wort »Befehlen« und »Gehorchen« verwen-

den, sind Gebärden, sowie Wörter in einem Netz mannigfaltiger Beziehungen verschlungen. Ist, in einem fremden Volkstamm, jener Mann unbedingt der Häuptling, dem die Andern gehorchen? – Was ist der Unterschied zwischen falsch schließen und nicht schließen? 351

49. »Daß die Logik zur Naturgeschichte des Menschen gehört« – ist nicht mit dem logischen ›muß‹ vereinbar.«

Die Übereinstimmung der Menschen, die eine Voraussetzung des Phänomens der Logik ist, ist nicht eine Übereinstimmung der *Meinungen*, geschweige denn von Meinungen über Fragen der Logik. 352

Teil VII

1. Die Rolle der Sätze, die von Maßen handeln und nicht Erfahrungssätze sind. Ein solcher Satz (z. B., 12 Zoll = 1 Fuß) ruht in einer Technik, und also in den Bedingungen dieser Technik; hat aber nicht den Sinn, diese Bedingungen auszusprechen. 355

2. Die Rolle der Regel. Mittels ihrer kann man auch Voraussetzungen machen. Dies beruht auf Eigenschaften der Maßstäbe und der Menschen, die sie gebrauchen. 355

3. Ein mathematischer Satz – eine Umformung des Ausdrucks. Die Regel in ihrer Nützlichkeit und in ihrer Würde betrachtet. Wie sollen zwei arithmetische Ausdrücke dasselbe sagen? Die Arithmetik setzt sie einander gleich. 357

4. Einer, der Arithmetik lernt, indem er nur meinen Beispielen folgt. Sage ich, »Wenn du mit diesen Zahlen machst, was ich dir auf den Andern vorgemacht habe, wirst du das und das erhalten« – so scheint das sowohl eine Vorhersage wie auch ein mathematischer Satz zu sein. 359

5. Der Unterschied zwischen: überrascht zu sein, daß die Ziffern

auf dem Papier sich *so* zu benehmen scheinen; und überrascht zu sein darüber, daß *das* herauskommt. 361

6. Ist nicht der Gegensatz zwischen Regeln der Darstellung und Sätzen, welche beschreiben, einer, der nach allen Richtungen hin abfällt? 363

7. »Mathematische Sätze und Beweise dienen dem Schließen.« 364

8. Wenn wir das Beweisen als eine Transformation eines Satzes durchs Experiment betrachten, und den rechnenden Menschen als Hilfsmittel, so werden die Zwischenstufen ein uninteressantes Nebenprodukt. 364

9. Der Beweis als Bild. Nicht die Approbation allein macht dies Bild zur Rechnung, sondern die Übereinstimmung der Approbationen. 365

10. Ändert sich der Sinn des Satzes, wenn ein Beweis gefunden wird? Der neue Beweis reiht den Satz in eine neue Ordnung ein. 366

11. Sagen wir, wir erhielten manche unserer Rechenresultate durch einen versteckten Widerspruch. Sind sie dadurch illegitim? Könnte man nicht einen Widerspruch gelten lassen? 369

12. »Eine Methode, die einen Widerspruch mechanisch vermeidet.« Nicht schlechte Mathematik wird hier verbessert, sondern ein neues Stück Mathematik erfunden. 371

13. Müssen die logischen Axiome immer überzeugend sein? 372

14. Die Leute, die gelegentlich durch Ausdrücke vom Werte o kürzen. 373

15. Wenn die Rechnung für mich ihren Witz verloren hat, so-

- bald ich weiß, wie ich nun alles Beliebige errechnen kann – hat sie keinen gehabt, so lang ich das *nicht* wußte?
Man denkt, der Widerspruch *muß* sinnlos sein. 374
16. Wozu braucht die Mathematik eine Grundlegung?
Ein guter Engel wird immer nötig sein. 378
17. Der praktische Wert des Rechnens. Rechnung und Experiment.
Eine Rechnung als ein Teil der Technik eines Experiments.
Die Rechnungshandlung kann auch ein Experiment sein. 379
18. Soll die Mathematik Tatsachen zu Tage bringen? Bestimmt sie nicht erst den Charakter dessen, was wir ›Tatsache‹ nennen?
Lehrt sie uns nicht nach Tatsachen zu fragen?
In der Mathematik gibt es keine kausalen Zusammenhänge, nur die Zusammenhänge des Bildes. 381
19. Bemerkungen. 383
20. Das Netz von Fugen einer Mauer. Warum nennen wir dies ein mathematisches Problem?
Macht die Mathematik Experimente mit *Einheiten*? 384
21. »Der Satz, der von sich selbst aussagt, er sei unbeweisbar« – wie ist das zu verstehen? 385
22. Die Konstruktion eines Satzzeichens aus Axiomen, nach Regeln; und es scheint, wir haben den wirklichen Sinn des Satzes als falsch demonstriert, und ihn zu gleicher Zeit bewiesen. 387
23. Die Frage »wieviele?«. Messung und Maßeinheit. 389
24. Daß das, was wir die *mathematische* Auffassung des Satzes nennen, mit der besondern Stellung zusammenhängt, die die Rechnung in unsern übrigen Tätigkeiten hat. 389

25. Was ist das Kriterium dafür, daß ich hier dem Paradigma gefolgt bin? 391
26. Wer mir das Lernen des ›Vorgehens nach der Regel‹ beschreibt, wird selbst in der Beschreibung den Ausdruck einer Regel verwenden und sein Verständnis bei mir voraussetzen. 392
27. Das Nicht-Geltenlassen des Widerspruchs charakterisiert die Technik unserer Verwendung der Wahrheitsfunktionen. –
Daß Einer das »usf.« versteht, zeigt sich darin, daß er in gewissen Fällen *dies* sagt und *so* handelt. 393
28. Zeigt der Widerspruch von »heterologisch« eine logische Eigenschaft dieses Begriffs? 395
29. Ein Spiel; und nach einem gewissen Zug, erweist sich jeder Versuch, weiterzuspielen, als den Regeln entgegen. 396
30. Das logische Schließen ist ein Teil eines Sprachspiels.
Logischer Schluß, und nicht-logischer Schluß.
Die logischen Schlußregeln können weder falsch noch richtig sein. Sie bestimmen die Bedeutung der Zeichen. 397
31. Ein zweckmäßiger Vorgang mit Zahlzeichen muß nicht sein, was wir »Rechnen« nennen. 398
32. Ist Mathematik mit rein phantastischer Anwendung nicht auch Mathematik? 399
33. Daß sie Begriffe bilde, kann einem großen Teil der Mathematik wesentlich sein; und in anderen Teilen keine Rolle spielen. 399
34. Die Leute sehen einen Widerspruch nicht, und ziehen Schlüsse aus ihm.
Kann es eine mathematische Aufgabe sein, die Mathematik zur Mathematik zu machen? 400

35. Wenn wirklich in der Arithmetik ein Widerspruch gefunden würde, so bewiese das, eine Arithmetik mit einem solchen Widerspruch könnte sehr gute Dienste leisten. 401
36. »Die Klasse der Löwen ist nicht ein Löwe, die Klasse der Klassen aber eine Klasse.« 401
37. »Ich lüge immer.« Welche Rolle könnte dieser Satz im menschlichen Leben spielen? 404
38. Logischer Schluß. Ist nicht eine Regel etwas willkürliches?
»Es ist den Menschen unmöglich, einen Gegenstand als von sich selbst verschieden anzuerkennen.« 404
39. »Richtig – d. h., das stimmt mit der Regel überein.« 405
40. »Das *Gleiche* bringen« – wie kann ich das Einem erklären? 406
41. Wann soll man von einem Beweis der Existenz von $\sqrt{777}$ in einer Entwicklung reden? 407
42. »Begriffsbildung« kann verschiedenes heißen.
Der Begriff der Regel zur Bildung eines unendlichen Dezimalbruchs. 408
43. Gehört es zum Begriff des Rechnens, daß die Menschen im allgemeinen zu diesem Resultat gelangen? 409
44. Wenn ich etwa frage, ob ein gewisser Körper sich einer Parabelgleichung gemäß bewegt – was tut die Mathematik in diesem Fall? 410
45. Fragen über die Weise, wie die Mathematik Begriffe bildet. 411
46. Kann man aber nicht doch mathematisch experimentieren? 413

47. Der Schüler hat die Regel inne, wenn er so und so auf sie reagiert. Diese Reaktion setzt bestimmte Umstände, Lebens- und Sprachformen, als Umgebung voraus. 413
48. »Die Linie gibt's mir ein, wie ich gehen soll.« 414
49. Unter Umständen: »Die Vorlage scheint ihm *einzugeben*, wie er zu gehen hat. Aber sie ist keine Regel.« 415
50. Wie ist das zu entscheiden, ob er immer das gleiche tut? 415
51. Ob er das gleiche tut, oder jedesmal etwas anderes – das bestimmt noch nicht, ob er einer Regel folgt. 416
52. Wenn man Beispiele aufzählt und dann sagt »und so weiter«, so wird dieser letztere Ausdruck nicht auf die gleiche Weise erklärt, wie die Beispiele. 416
53. Nimm an, eine innere Stimme – eine Art Inspiration – sagt mir, wie ich der Linie folgen soll. Was ist der Unterschied zwischen diesem Vorgang und dem, einer Regel zu folgen? 417
54. »Das gleiche tun« ist mit »der Regel folgen« verknüpft. 418
55. Kann ich das Sprachspiel spielen, wenn ich nicht spontan so und so reagiere? 419
56. Wir sehen, was wir beim Folgen nach der Regel tun, unter dem Gesichtspunkt des *immer gleichen* an. 419
57. Die Kunstrechner, die zum richtigen Resultat gelangen, aber nicht sagen können, wie. Sollen wir sagen: sie rechnen nicht? 419
58. »Einer Regel zu folgen *glauben*.« 420
59. Wie kann ich das Wort »gleich« erklären? – Woher das Gefühl, in meinem Verständnis liege mehr, als ich sagen kann? 420

60. Das *Ungreifbare* des Eingebens: daß *nichts* zwischen der Regel und meiner Handlung steht. 421
61. Eine Addition von Formen. Möglichkeiten im Falten eines Stücks Papier. Wie, wenn man keine Spaltung zwischen der geometrischen Möglichkeit und der physikalischen Möglichkeit machte?
 Könnten nicht Leute u. U. mit Ziffern rechnen, ohne daß ein bestimmtes Resultat herauskommen *müßte*?
 Wem die Rechnung einen kausalen Zusammenhang entdeckt, der rechnet nicht.
 Die Mathematik ist normativ. 422
62. Die Einführung einer neuen Schlußregel als Übergang zu einem neuen Sprachspiel. 425
63. Beobachtung, daß eine Fläche rot und blau gefärbt ist, aber nicht, daß sie rot ist. Schlüsse davon.
 Kann die Logik uns sagen, was wir beobachten müssen? 425
64. Eine Fläche mit Streifen von wechselnden Farben.
 Könnte man Implikationen beobachten? 426
65. Einer sagt, er sieht einen rot und gelben Stern, aber nichts Gelbes. 428
66. »Ich halte mich an eine Regel.« 429
67. Das mathematische Muß – der Ausdruck einer Einstellung zur Technik des Rechnens.
 Der Ausdruck dafür, daß die Mathematik Begriffe bildet. 430
68. Der Fall, man sehe den Komplex von A und B, aber weder A noch B.
 Kann ich A und B sehen, aber nur $A \vee B$ beobachten?
 Und umgekehrt. 431
69. Erfahrungen und zeitlose Sätze. 432

70. Inwiefern kann man sagen, ein Satz der Arithmetik gebe uns einen Begriff? 432
71. Nicht in jedem Sprachspiel gibt es etwas, was man »Begriff« nennen will. 433
72. Beweis und Bild. 434
73. Ein Sprachspiel, in dem Axiome, Beweise und bewiesene Sätze auftreten. 435
74. Jeder Beweis in der angewandten Mathematik kann aufgefaßt werden als ein Beweis der reinen Mathematik, welcher beweist, daß *dieser* Satz aus *diesen* Sätzen durch die und die Operationen zu erhalten ist. – Jeder Erfahrungssatz kann als Regel dienen, wenn man ihn unbeweglich macht und er zum Teil des Koordinatensystems wird. 436