

Vorwort	v
---------------	---

Teil I Grundlagen	1
--------------------------	----------

1 Mengenlehre und Logik	3
1.1 Mengengebrieff	3
1.2 Mengenoperationen	6
1.3 Abbildungen	9
1.4 Aussagenlogik	14
1.5 Prädikatenlogik	20
1.6 Beweise	26
Literaturverzeichnis	28
2 Reelle Zahlen	29
2.1 Natürliche und ganze Zahlen	30
2.1.1 Ordnung	31
2.1.2 Zahlendarstellung	32
2.1.3 Primzahlen	34
2.1.4 Fakultät und Binomialkoeffizient	37
2.2 Rationale Zahlen	39
2.2.1 Rechnen mit rationalen Zahlen (Bruchrechnung)	40
2.2.2 Dezimalbruchdarstellung rationaler Zahlen	43
2.2.3 Abzählbarkeit *	45
2.2.4 Vollständige Induktion	47
2.3 Reelle Zahlen	49
2.3.1 Von den rationalen zu den reellen Zahlen	49
2.3.2 Vollständigkeit und Einführung der reellen Zahlen	53
2.3.3 Variablennamen	57
2.3.4 Intervalle	58
2.3.5 Die Zahlen e und π	58
2.3.6 Überabzählbarkeit der reellen Zahlen *	60

Literaturverzeichnis	61
3 Rechnen mit reellen Zahlen	63
3.1 Potenzen und Wurzeln	63
3.2 Summen und Produkte, Binomischer Lehrsatz	66
3.2.1 Summenzeichen und Produktzeichen	66
3.2.2 Geometrische Summenformel und Anwendungen	69
3.2.3 Binomischer Lehrsatz	72
3.3 Beträge und Ungleichungen	74
3.3.1 Beträge	75
3.3.2 Ungleichungen	75
3.4 Über das Lösen von Gleichungen und Ungleichungen	81
3.4.1 Rationale Gleichungen, Wurzel-, Betragsgleichungen ..	81
3.4.2 Rationale Ungleichungen und Betragsgleichungen ..	84
Literaturverzeichnis	88
4 Reelle Funktionen	89
4.1 Notation reeller Funktionen	89
4.2 Eigenschaften von reellen Funktionen	93
4.3 Umkehrfunktion	98
4.4 Verkettung von Funktionen	100
4.5 Signum- und Betragsfunktion	102
4.6 Polynome und gebrochen-rationale Funktionen	103
4.6.1 Polynome	103
4.6.2 Interpolation	105
4.6.3 Faktorzerlegung und Polynomdivision	107
4.6.4 Horner-Schema	111
4.6.5 Gebrochen-rationale Funktionen	113
4.7 Potenz- und Wurzelfunktionen	114
4.8 Exponentialfunktionen und Logarithmen	116
4.8.1 Exponentialfunktion und natürlicher Logarithmus ...	116
4.8.2 Allgemeine Exponentialfunktionen und Logarithmen ..	119
4.8.3 Exponential- und Logarithmusgleichungen	120
4.8.4 Logarithmische Darstellungen	124
4.9 Trigonometrische Funktionen	127
4.9.1 Winkel und Bogenmaß	127
4.9.2 Sinus, Kosinus und Tangens	127
4.9.3 Trigonometrische Funktionen in der Geometrie	132
4.9.4 Additionstheoreme	134
4.9.5 Harmonische Schwingungen und Zeigerdiagramme ...	137
4.9.6 Arkus-Funktionen	140
4.9.7 Trigonometrische Gleichungen	143
4.10 Hyperbel- und Areafunktionen	144
4.10.1 Hyperbelfunktionen	144
4.10.2 Areafunktionen	146

5	Komplexe Zahlen	149
5.1	Erweiterung der reellen Zahlen um eine imaginäre Einheit ...	150
5.2	Komplexe Arithmetik	151
5.3	Die Gauß'sche Zahlenebene	153
5.3.1	Betrag	153
5.3.2	Rechnen mit Beträgen komplexer Zahlen	154
5.3.3	Euler'sche Gleichung, Polarform und Eulerform	156
5.3.4	Komplexe Potenzen und komplexe Wurzeln	160
5.4	Komplexe Wechselstromrechnung *	165
5.5	Fundamentalsatz der Algebra	168
	Literaturverzeichnis	174
6	Lineare Gleichungssysteme und Matrizen	175
6.1	Lineare Gleichungssysteme	176
6.2	Matrizen, Zeilen- und Spaltenvektoren	177
6.3	Lösen linearer Gleichungssysteme	185
6.3.1	Gauß-Algorithmus	185
6.3.2	Lösungstheorie linearer Gleichungssysteme	190
6.4	Inverse Matrix und transponierte Matrix	193
6.5	Symmetrische und orthogonale Matrizen	199
6.6	Dreiecksmatrizen, Bandmatrizen und LR-Zerlegung *	201
6.6.1	Dreiecksmatrizen und Bandmatrizen	201
6.6.2	LR-Zerlegung	202
	Literaturverzeichnis	207
7	Determinanten	209
7.1	Definition und elementare Eigenschaften von Determinanten .	209
7.2	Determinanten und lineare Gleichungssysteme	221
8	Aufgaben zu Teil I	229
8.1	Rechnen, Mengen und Logik	229
8.2	Vollständige Induktion und Binomischer Lehrsatz	231
8.3	Gleichungen und Funktionen	231
8.4	Komplexe Zahlen	235
8.5	Lineare Gleichungssysteme und Matrizen	236
8.6	Determinanten	240
	Literaturverzeichnis	241

9	Folgen	245
9.1	Definition und Grundbegriffe von Folgen	245
9.2	Konvergenz und Divergenz von Folgen	250
9.3	Rechnen mit konvergenten Folgen	253
9.4	Konvergenzkriterien	257
9.5	Die Euler'sche Zahl e als Grenzwert von Folgen	260
9.6	Approximation reeller Potenzen	263
9.7	Bestimmte Divergenz	263
9.8	Häufungspunkte einer Folge*	266
9.9	Folgenkompaktheit und Cauchy-Folgen*	267
	Literaturverzeichnis	271
10	Zahlen-Reihen	273
10.1	Definition und Konvergenz einer Reihe	273
10.2	Rechnen mit konvergenten Reihen	278
10.3	Alternativen zur Definition der Reihenkonvergenz	279
10.4	Absolute Konvergenz	281
10.5	Konvergenzkriterien für Reihen	283
	Literaturverzeichnis	294
11	Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit	295
11.1	Umgebungen und Überdeckungen	295
11.2	Grenzwerte von Funktionen	298
11.3	Stetigkeit	311
11.4	Eigenschaften stetiger Funktionen	319
11.5	Unstetigkeitsstellen	326
12	Differenzierbarkeit und Ableitungen	331
12.1	Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten	331
12.2	Ableitungsregeln	338
12.3	Newton-Verfahren	349
12.4	Das Differenzial	351
12.5	Höhere Ableitungen	353
	Literaturverzeichnis	357
13	Zentrale Sätze der Differenzialrechnung	359
13.1	Satz von Fermat: notwendige Bedingung für lokale Extrema ..	359
13.2	Mittelwertsätze der Differenzialrechnung	360
13.3	Regeln von L'Hospital	368
	Literaturverzeichnis	375

14	Integralrechnung	377
14.1	Definition des Integrals	378
14.2	Eigenschaften des Integrals	383
14.3	Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung	388
14.4	Rechenregeln zur Integration	393
14.4.1	Partielle Integration	395
14.4.2	Integralsubstitution	397
14.4.3	Integration gebrochen-rationaler Funktionen	405
14.5	Numerische Integration	413
14.6	Uneigentliche Integrale	416
14.6.1	Unbeschränkter Integrand	417
14.6.2	Unbeschränkter Integrationsbereich	418
14.7	Volumen und Flächen	424
14.7.1	Flächenberechnung in der Ebene	424
14.7.2	Volumen eines Rotationskörpers	426
14.7.3	Oberflächeninhalt eines Rotationskörpers	427
14.8	Lebesgue-Integral*	428
14.8.1	Messbare Mengen	431
14.8.2	Messbare Funktionen	433
14.8.3	Definition des Lebesgue-Integrals	433
14.8.4	Eigenschaften des Lebesgue-Integrals	435
	Literaturverzeichnis	438
15	Satz von Taylor, Kurvendiskussion und Extremalprobleme	439
15.1	Taylor-Summen	439
15.2	Kurvendiskussion und Extremalprobleme	444
	Literaturverzeichnis	456
16	Potenzreihen	457
16.1	Unendliche Taylor-Summen und Potenzreihen	457
16.2	Einschub: Funktionenfolgen*	461
16.3	Konvergenz von Potenzreihen	471
16.4	Differenziation und Integration von Potenzreihen	475
16.5	Der Zusammenhang zwischen Potenzreihen und Taylor-Reihen	477
16.6	Die komplexe Exponentialfunktion	479
	Literaturverzeichnis	480
17	Aufgaben zu Teil II	481
17.1	Folgen	481
17.2	Reihen	482
17.3	Funktionengrenzwerte und Stetigkeit	483
17.4	Ableitungen	484
17.5	Integrale	485
17.6	Satz von Taylor und Kurvendiskussion	487
17.7	Potenzreihen	489

18	Vektoren in der Ebene und im Raum	493
18.1	Vektoren: Grundbegriffe und elementare Rechenregeln.....	494
18.1.1	Vektorarithmetik	495
18.1.2	Koordinaten und Komponenten	497
18.2	Skalarprodukt und Orthogonalität	502
18.2.1	Definition des Skalarprodukts	503
18.2.2	Rechenregeln, Koordinatenform und Winkelberechnung	504
18.2.3	Anwendungen des Skalarprodukts in der Geometrie ...	507
18.2.4	Orthogonale Projektion und Lot	509
18.3	Vektorprodukt und Spatprodukt	511
18.3.1	Vektorprodukt	511
18.3.2	Spatprodukt	516
18.4	Anwendungen des Skalar-, Vektor- und Spatprodukts	518
18.5	Geraden in der Ebene und im Raum	521
18.5.1	Darstellungsformen von Geraden	521
18.5.2	Typische Aufgabenstellungen für Geraden	524
18.6	Ebenen im Raum	528
18.6.1	Darstellungsformen von Ebenen im Raum	528
18.6.2	Typische Aufgabenstellungen für Ebenen	533
	Literaturverzeichnis	535
19	Vektorräume	537
19.1	Definition des Vektorraums	538
19.1.1	Vektorraumaxiome	538
19.1.2	Linearkombinationen und Erzeugendensysteme	542
19.1.3	Unterräume	544
19.2	Lineare Unabhängigkeit, Basis und Dimension	546
19.2.1	Lineare Unabhängigkeit und lineare Abhängigkeit ...	546
19.2.2	Basis und Dimension	550
19.3	Skalarprodukt und Norm	556
19.3.1	Euklid'scher Raum und Skalarprodukt	556
19.3.2	Betrag, Norm und Abstand	559
19.4	Orthogonalität, Orthogonal- und Orthonormalsysteme	561
19.4.1	Winkel und Orthogonalität	561
19.4.2	Orthogonal- und Orthonormalsysteme	563
19.4.3	Euklid'sche Räume endlicher Dimension	564
19.4.4	Gram-Schmidt'sches Orthonormierungsverfahren	566
19.4.5	Orthogonale Projektion	568
19.4.6	Orthogonale Matrizen	571

20	Lineare Abbildungen	575
	20.1 Lineare Abbildungen und Matrizen	576
	20.2 Linearkombination und Verkettung linearer Abbildungen	580
	20.3 Kern und Bild einer linearen Abbildung, Dimensionssatz	584
	20.4 Umkehrabbildung und inverse Matrix	591
	20.5 Koordinaten- und Basistransformationen *	594
21	Lösungstheorie linearer Gleichungssysteme	599
	21.1 Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems	599
	21.2 Berechnung von linearen elektrischen Netzwerken *	605
	21.2.1 Elektrische Netzwerke und Graphen	605
	21.2.2 Maschengleichungen	609
	21.2.3 Knotengleichungen	611
	21.2.4 Gleichungen zwischen Spannungen und Strömen	612
	Literaturverzeichnis	613
22	Eigenwerte und Eigenvektoren	615
	22.1 Eigenwerte und Eigenvektoren	615
	22.2 Diagonalisierung von Matrizen *	626
	22.3 Hauptvektoren und Jordan-Normalform *	631
	Literaturverzeichnis	635
23	Normierte Vektorräume: Lineare Algebra trifft Analysis * .	637
	23.1 Norm	637
	23.2 Banach- und Hilbert-Räume	640
	23.3 L^p -Räume	643
	23.4 Stetige Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen	648
	23.4.1 Stetigkeit und Operatornormen	648
	23.4.2 Matrix-Normen	653
	23.4.3 Kondition, Stabilität und Konsistenz	655
	23.4.4 Fixpunktverfahren für lineare Gleichungssysteme	658
	23.5 Einige zentrale Sätze der Funktionalanalysis	660
	23.6 Sobolev-Räume	668
	Literaturverzeichnis	669
24	Aufgaben zu Teil III	671
	24.1 Rechnen mit Vektoren im Anschauungsraum	671
	24.2 Vektorräume	672
	24.3 Matrizen und lineare Abbildungen	674

Kleine Formelsammlung	675
Index	681