

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	xi
I Zahlen	1
1 Komplexe Zahlen	2
1.1 Entdeckungsgeschichte	2
1.2 Definition und Eigenschaften	3
1.3 Darstellungen und geometrische Aspekte	10
1.4 Aufgaben	14
2 Quaternionen	15
2.1 Entdeckungsgeschichte	15
2.2 Definition und Eigenschaften	16
2.3 Abbildungen und Darstellungen	24
2.3.1 Basismorphismen	25
2.3.2 Drehungen im $\mathbb{R}^3$	27
2.3.3 Drehungen des $\mathbb{R}^4$	30
2.3.4 Darstellungen	32
2.4 Vektoren und geometrische Aspekte	34
2.4.1 Bilineare Produkte	38
2.4.2 Multilineare Produkte	44
2.5 Anwendungen	47
2.5.1 Visualisierungen der Sphäre S^3	47
2.5.2 Elemente der sphärischen Trigonometrie	49
2.6 Aufgaben	51
3 Clifford-Zahlen	52
3.1 Entdeckungsgeschichte	52
3.2 Definition und Eigenschaften	54
3.2.1 Definition der Clifford-Algebra	54
3.2.2 Strukturen und Automorphismen	57
3.2.3 Absoluter Betrag	60
3.3 Geometrische Anwendungen	63
3.3.1 Spin-Gruppe	63
3.3.2 Konstruktion von Drehungen des $\mathbb{R}^n$	65

3.3.3	Drehungen des $\mathbb{R}^{n+1}$	68
3.4	Darstellungen	69
3.5	Aufgaben	73

II Funktionen 75

4	Topologische Aspekte	76
4.1	Topologie und Stetigkeit	76
4.2	Reihen	81
4.3	Riemannsche Sphären	86
4.3.1	Komplexer Fall	86
4.3.2	Höhere Dimensionen	89
4.4	Aufgaben	90
5	Holomorphe Funktionen	92
5.1	Differenzierbarkeit in $\mathbb{C}$	92
5.2	Differenzierbarkeit in $\mathbb{H}$	98
5.2.1	Mejlikhzhons Resultat	99
5.2.2	$\mathbb{H}$ -Holomorphie	100
5.2.3	Holomorphie und Differentialformen	104
5.3	Differenzierbarkeit in $\mathcal{Cl}(n)$	107
5.4	Aufgaben	110
6	Potenzen und Möbiustransformationen	111
6.1	Potenzfunktionen	111
6.1.1	Potenzfunktionen in $\mathbb{C}$	111
6.1.2	Potenzfunktionen in höheren Dimensionen	112
6.2	Möbiustransformationen	117
6.2.1	Möbiustransformationen in $\mathbb{C}$	117
6.2.2	Möbiustransformationen in höheren Dimensionen	121
6.3	Aufgaben	127

III Integration und Integralsätze 129

7	Integralsätze und Integralformeln	130
7.1	Cauchyscher Integralsatz und dessen Umkehrung	130
7.2	Formeln von Borel–Pompeiu und Cauchy	133
7.2.1	Formel von Borel–Pompeiu	133
7.2.2	Formel von Cauchy	135
7.2.3	Formeln von Plemelj–Sokhotzki	137
7.2.4	Zur Geschichte der Formeln von Cauchy und Borel–Pompeiu	142
7.3	Folgerungen aus der Integralformel von Cauchy	145
7.3.1	Höhere Ableitungen holomorpher Funktionen	145
7.3.2	Mittelwerteigenschaft und Maximumprinzip	149
7.3.3	Satz von Liouville	151
7.3.4	Integralformeln von Schwarz und Poisson	152
7.4	Aufgaben	154

8	Teodorescu-Transformation	156
8.1	Eigenschaften der Teodorescu-Transformation	156
8.2	Hodge-Zerlegung des quaternionalen Hilbertraums	162
8.2.1	Hodge-Zerlegung	162
8.2.2	Darstellungssatz	164
8.3	Aufgaben	165
IV	Reihenentwicklungen und lokales Verhalten	167
9	Potenzreihen	168
9.1	Konvergenzsätze vom Weierstraß-Typ, Potenzreihen	168
9.1.1	Konvergenzsätze von Weierstraß	168
9.1.2	Potenzreihen in $\mathbb{C}$	170
9.1.3	Potenzreihen in $\mathcal{Cl}(n)$	174
9.2	Taylor- und Laurentreihen in $\mathbb{C}$	175
9.2.1	Taylorreihen	175
9.2.2	Laurentreihen	179
9.3	Taylor- und Laurentreihen in $\mathcal{Cl}(n)$	181
9.3.1	Taylorreihen	181
9.3.2	Laurentreihen	188
9.4	Aufgaben	191
10	Orthogonalentwicklungen in $\mathbb{H}$	193
10.1	Vollständige $\mathbb{H}$ -holomorphe Funktionensysteme	193
10.1.1	Polynomiale Systeme	195
10.1.2	Innere und äußere sphärische Funktionen	198
10.1.3	Harmonische Kugelfunktionen	202
10.1.4	$\mathbb{H}$ -holomorphe Kugelfunktionen	204
10.1.5	Vollständigkeit in $L^2(\mathbb{B}_3) \cap \ker \bar{\partial}$	209
10.2	Fourierentwicklung in $\mathbb{H}$	210
10.3	Anwendungen	211
10.3.1	Ableitungen $\mathbb{H}$ -holomorpher Polynome	211
10.3.2	Stammfunktionen $\mathbb{H}$ -holomorpher Funktionen	215
10.3.3	Dekompositionssatz und Taylorentwicklung	221
10.4	Aufgaben	223
11	Elementare Funktionen	226
11.1	Elementare Funktionen in $\mathbb{C}$	226
11.1.1	Exponentialfunktion	226
11.1.2	Trigonometrische Funktionen	227
11.1.3	Hyperbolische Funktionen	230
11.1.4	Logarithmus	231
11.2	Elementare Funktionen in $\mathcal{Cl}(n)$	233
11.2.1	Polare Zerlegung des Cauchy-Riemann-Operators	233
11.2.2	Elementare radiale Funktionen	237
11.2.3	Fueter-Sce Konstruktion holomorpher Funktionen	243
11.2.4	Cauchy-Kowalewski-Fortsetzung	248

	11.2.5	Trennung der Variablen	253
	11.3	Aufgaben	259
12	Lokale	Struktur holomorpher Funktionen	262
	12.1	Nullstellenverhalten	262
	12.1.1	Nullstellen in $\mathbb{C}$	262
	12.1.2	Nullstellen in $C\ell(n)$	265
	12.2	Isolierte Singularitäten holomorpher Funktionen	269
	12.2.1	Isolierte Singularitäten in $\mathbb{C}$	269
	12.2.2	Isolierte Singularitäten in $C\ell(n)$	275
	12.3	Residuensatz und Argumentprinzip	278
	12.3.1	Residuensatz in $\mathbb{C}$	278
	12.3.2	Argumentprinzip in $\mathbb{C}$	281
	12.3.3	Residuensatz in $C\ell(n)$	285
	12.3.4	Argumentprinzip in $C\ell(n)$	287
	12.4	Berechnung reeller Integrale	290
	12.5	Aufgaben	295
13	Spezielle	Funktionen	298
	13.1	Eulersche Gammafunktion	298
	13.1.1	Definition und Funktionalgleichungen	298
	13.1.2	Stirlingsche Formel	303
	13.2	Riemannsche Zetafunktion	307
	13.2.1	Dirichletreihen	307
	13.2.2	Riemannsche Zetafunktion	310
	13.3	Automorphe Formen und Funktionen	313
	13.3.1	Automorphe Funktionen und Formen in $\mathbb{C}$	313
	13.3.2	Automorphe Funktionen und Formen in $C\ell(n)$	320
	13.4	Aufgaben	334

Anhang **337**

A.1	Differentialformen im $\mathbb{R}^n$	338
	A.1.1 Alternierende Abbildungen	338
	A.1.2 Differentialformen	343
	A.1.3 Aufgaben	350
A.2	Integration und Mannigfaltigkeiten	351
	A.2.1 Integralbegriffe	351
	A.2.1.1 Integration im $\mathbb{R}^{n+1}$	351
	A.2.1.2 Koordinatenwechsel in Differentialformen	352
	A.2.1.3 Mannigfaltigkeiten und Integration	354
	A.2.2 Sätze von Stokes, Gauß und Green	365
	A.2.2.1 Satz von Stokes	365
	A.2.2.2 Satz von Gauß	365
	A.2.2.3 Satz von Green	367
	A.2.3 Aufgaben	368

A.3	Einige Funktionenräume	371
A.3.1	Räume hölderstetiger Funktionen	371
A.3.2	Räume differenzierbarer Funktionen	372
A.3.3	Räume integrierbarer Funktionen	373
A.3.4	Distributionen	374
A.3.5	Hardy-Räume	375
A.3.6	Sobolev-Räume	375
A.4	Eigenschaften holomorpher Kugelfunktionen	377
A.4.1	Eigenschaften der Legendre-Polynome	377
A.4.2	Norm der holomorphen Kugelfunktionen	378
A.4.3	Skalarprodukte holomorpher Kugelfunktionen	382
A.4.4	Vollständige Orthonormalsysteme in $\mathcal{H}_{n,\mathbb{H}}^+$	384
A.4.5	Ableitungen holomorpher Kugelfunktionen	388
A.4.6	Aufgaben	389
	Literaturverzeichnis	391
	Index	399