
Inhaltsverzeichnis

1	Warum verwendet ein Biologe eigentlich Mathematik?	1
1.1	Unsere Welt aus biologischer Sicht	1
1.1.1	Zustand eines Beobachtungsgegenstandes	1
1.1.2	Beobachtung und Zeit	2
1.1.3	Grafische Veranschaulichung einer Messreihe	4
1.2	Evolutionen in der Natur	5
1.2.1	Was ist eine Evolution?	5
1.2.2	Rekonstruktion und Erkenntnis	7
1.2.3	Sättigung einer Evolution	8
1.3	Rekonstruktion von Funktionen	10
1.3.1	Die Aufgabe	10
1.3.2	Ansatzfunktionen	10
1.3.3	Gütemaß einer Rekonstruktion	12
1.3.4	Rekonstruktion und Erkenntnis	15
1.4	Veränderungen in der Natur	16
1.4.1	Wie kann man einer 'wahren' Evolution auf die Spur kommen?	16
1.4.2	Veränderungsrate	17
1.5	Mathematische Modelle in der Biologie	18
1.5.1	Wie kommt mathematisches Denken zum Einsatz?	18
1.5.2	Entwicklung einer Population: eine dynamische Gleichung	20
1.5.3	Ligandenbindung: zwei dynamische Gleichungen	22
1.5.4	Substratfluss unter anaeroben Bedingungen: zwei dynamische Gleichungen	23
1.5.5	Streitbare Populationen: zwei dynamische Gleichungen .	25
2	Grundbestandteile mathematischer Modellierung	29
2.1	Das Geschehen in diesem Kapitel	29
2.2	Entwicklung von Populationen	30
2.2.1	Zwei Experimente	30

- 2.2.2 Vom Experiment zur mathematischen Beschreibung ... 32
 - 2.2.3 Veränderungen 34
 - 2.2.4 Ratengleichungen 35
 - 2.2.5 Ausblick 37
- 2.3 Kombinatorik in der Biologie: Zahlen 38
 - 2.3.1 Eine kombinatorische Aufgabe der Enzymkinetik 38
 - 2.3.2 Kinetische Gastheorie als Sonderfall 40
 - 2.3.3 Natürliche und ganze Zahlen 43
 - 2.3.4 Rationale und reelle Zahlen 43
 - 2.3.5 Absoluter Betrag reeller Zahlen 44
- 2.4 Beschreibung von Vorgängen: Funktionen 45
 - 2.4.1 Funktionen 45
 - 2.4.2 Die logistische Kurve, Verkettung von Funktionen 46
 - 2.4.3 Monotone Funktionen 47
 - 2.4.4 Die Exponentialfunktion 48
 - 2.4.5 Potenzen 50
 - 2.4.6 Polynome, rationale Funktionen 51
 - 2.4.7 Konstruktion von Funktionen 53
 - 2.4.8 Der Logarithmus 55
- 2.5 Die Veränderungsrate von Vorgängen: Ableitung 56
 - 2.5.1 Die Idee der Veränderungsrate zu einem festen Zeitpunkt 56
 - 2.5.2 Definition der Veränderungsrate: Ableitung einer Funktion 57
 - 2.5.3 Grundregeln der Differentialrechnung 60
 - 2.5.4 Konsistenz der Tabellen 2.5 und 2.6 62
 - 2.5.5 Die logistische Kurve als Lösung der Verhulstgleichung . 62
 - 2.5.6 Exponentielles Wachstum 64
- 2.6 Anwendungen der Ableitung: Monotonie, Extrema, Krümmung 65
 - 2.6.1 Motivation 65
 - 2.6.2 Monotonie und Ableitung 65
 - 2.6.3 Monotonieverhalten bei der logistischen Kurve 66
 - 2.6.4 Qualitative Kurvendiskussion 66
 - 2.6.5 Krümmung und zweite Ableitung 66
 - 2.6.6 Ligandenbindung an Proteine 68
 - 2.6.7 Sigmoides Verhalten bei der logistischen Kurve 71
- 2.7 Übungsaufgaben 73

- 3 Evolutionen: Skalare Differentialgleichungen erster Ordnung 77**
 - 3.1 Das Geschehen in diesem Kapitel 77
 - 3.2 Qualitative Methoden 79
 - 3.2.1 Evolution einer reellen Variablen 79
 - 3.2.2 Zeitunabhängige Evolutionen: Stationäre Punkte 81
 - 3.2.3 Monoton wachsende Evolutionen 81
 - 3.2.4 Monoton fallende Evolutionen 82
 - 3.2.5 Langzeitverhalten von Evolutionen 82

3.2.6	Stabilität von stationären Punkten	83
3.2.7	Wendepunkte	83
3.2.8	Qualitative Analyse: die Verhulstgleichung	84
3.2.9	Qualitative Analyse: Allgemeine Evolutionen	85
3.3	Quantitative Methoden	86
3.3.1	Motivation	86
3.3.2	Die einfachste Ratengleichung	86
3.3.3	Stammfunktion	86
3.3.4	Angabe einfacher Stammfunktionen	87
3.3.5	Quantitative Analyse: Separation der Variablen	88
3.3.6	Quantitative Analyse: exponentielles und logistisches Wachstum	89
3.4	Integrale: Summenregel und Partialbruchzerlegung	91
3.4.1	Motivation	91
3.4.2	Integrale	92
3.4.3	Geometrische Interpretation des Integrals	92
3.4.4	Integration als Umkehrung der Differentiation	93
3.4.5	Summenregel	94
3.4.6	Quantitative Behandlung einer Ratengleichung	95
3.5	Integral: partielle Integration	98
3.5.1	Umkehrung der Produktregel	98
3.5.2	RNA-Gehalt einer Zelle	99
3.5.3	Zur Idee der partiellen Integration	100
3.6	Existenz und Eindeutigkeit	101
3.6.1	Lösbarkeit von Anfangswertaufgaben	101
3.6.2	Lösungsgesamtheit	102
3.7	Übungsaufgaben	102
3.7.1	Differentialgleichungen, Anfangswertaufgaben	102
3.7.2	Integration	104
4	Beschreibung von Vorgängen mit mehr als einer unabhängigen Variablen	107
4.1	Das Geschehen in diesem Kapitel	107
4.2	Funktionen mehrerer Veränderlicher: Größen	108
4.2.1	Motivation	108
4.2.2	Wachstum einer Population auf einem Substrat	109
4.2.3	Räuber-Beute-Interaktion	110
4.2.4	Präbiotische Evolution	111
4.2.5	Zustände von natürlichen Systemen mit mehr als einer Größe	112
4.2.6	Reelle Funktionen auf Teilmengen des $\mathbb{R}^N$	113
4.2.7	Graphische Darstellungsmöglichkeiten	114
4.2.8	Größen und ihre Abhängigkeiten	116
4.2.9	Implizite Gleichungen	117
4.2.10	Implizit definierte Funktionen: allgemeiner Fall	117

4.3	Veränderungsrate in Richtung verschiedener Variabler:	
	partielle Ableitung	118
4.3.1	Motivation	118
4.3.2	Verschiedene Abhängigkeiten bei der logistischen Kurve	119
4.3.3	Partielle Ableitung	120
4.3.4	Zweite partielle Ableitung	121
4.4	Approximation von Funktionen: Taylor Polynome	122
4.4.1	Motivation	122
4.4.2	Taylor Polynome mit einer Veränderlichen	122
4.4.3	Taylor Polynome der Exponentialfunktion	124
4.4.4	Taylor Polynom bei mehreren Veränderlichen	125
4.4.5	Taylor Polynom beim Räuber-Beute-Modell	126
4.5	Veränderungsrate einer Größe: vollständiges Differential	127
4.5.1	Motivation und Ausblick	127
4.5.2	Abhängigkeiten von Größen und deren Veränderungen	129
4.5.3	Idee des vollständigen Differentials	132
4.5.4	Definition des vollständigen Differentials	132
4.5.5	Wieso ist das vollständige Differential vollständig?	134
4.5.6	Vollständiges Differential bei Abhängigkeit von nur einer Größe	134
4.5.7	Vollständiges Differential bei Abhängigkeit von zwei Größen: Potentiale	136
4.6	Übungsaufgaben	137
4.6.1	Funktionen mehrerer Veränderlicher	137
4.6.2	Vollständige Differentiale	138
5	Rekonstruktion von Funktionen aus Zahlenpaaren:	
	Lineare Datenanpassung	139
5.1	Das Geschehen in diesem Kapitel	139
5.2	Rekonstruktion	141
5.2.1	Geschwindigkeit der Michaelis-Menten-Reaktion	141
5.2.2	Rekonstruktion einer Funktion	143
5.2.3	Lineare Theoriefunktion	144
5.2.4	(d, p) -Matrizen	145
5.2.5	Matrixmultiplikation	146
5.3	Geometrie und lineare Abbildungen im $\mathbb{R}^N$	148
5.3.1	Fehlerquadratsumme	148
5.3.2	Abstand, inneres Produkt	149
5.3.3	Matrix und lineare Abbildung	152
5.3.4	Transponierte Matrix	152
5.4	Lineare Datenanpassung: Ergebnisse der linearen Algebra	153
5.4.1	Kennzeichnung der Minimalabweichung	153
5.4.2	Vollständige Beschreibung aller Minimierer	155
5.4.3	Assoziativität der Matrizenmultiplikation	156
5.4.4	Eindeutiger Minimierer	157

5.4.5	Gradient von $h(x)$	159
5.5	Linearer Datenausgleich: Bestimmung biologischer Konstanten	160
5.5.1	Michaelis-Menten-Bestimmung	160
5.5.2	Lineare Gleichungssysteme in der Ebene	161
5.5.3	Inversion	163
5.6	Geschwindigkeit einer Michaelis-Menten-Aktion	164
5.6.1	Definition der Geschwindigkeit v	164
5.6.2	Rekonstruktion von $p(t)$ zur Bestimmung von v	166
5.6.3	Lineare Gleichungssysteme im $\mathbb{R}^3$	168
5.6.4	Geschwindigkeitsbestimmung aus Felddaten: die Inversion	169
5.7	Übungsaufgaben	173
6	Interaktionen zweier Populationen	177
6.1	Das Geschehen in diesem Kapitel	177
6.2	Ligandenbindung	179
6.2.1	Die dynamischen Gleichungen	179
6.2.2	Eine skalare Aufgabe	181
6.2.3	Evolution der Ligandenbindung	182
6.2.4	Charakteristik und K_D	182
6.3	Substratumsetzende Organismen	185
6.3.1	Fläschchenexperiment	185
6.3.2	Erhaltungssatz	186
6.3.3	Lösungsgesamtheit	187
6.3.4	Diskussion aller Lösungen	188
6.3.5	Phasenebene	189
6.4	Lineare Räuber-Beute-Interaktion: Winkelfunktionen	191
6.4.1	Ein spezielles Räuber-Beute-Modell	191
6.4.2	$\sin$ und $\cos$	192
6.4.3	Rückführung auf eine skalare Gleichung	193
6.4.4	Eigenschaften von $\cos$ und $\sin$	195
6.4.5	Anwendung auf das spezielle Räuber-Beute-Modell ...	196
6.5	Die Winkelfunktion $\operatorname{tg}(t)$	197
6.5.1	Tangens und Arcus Tangens	197
6.5.2	Ableitung und Stammfunktion	198
6.6	Lineare Differentialgleichungssysteme in der Ebene: Matrizen und Eigenwerte	198
6.6.1	Ligandenbindung	198
6.6.2	Lineare dynamische Systeme: Räuber-Beute-Modell ...	201
6.6.3	Alle Lösungen von (6.100)	202
6.7	Biologische Evolution	202
6.7.1	Ausgangspunkt der Überlegungen	202
6.7.2	Evolution einer einzigen Population	203
6.7.3	Replikations- und Sterberaten	204
6.7.4	Evolution zweier Populationen	206

6.8	Übungsaufgaben	211
7	Lösungen der Übungsaufgaben.....	215
7.1	Lösungen zum Kapitel 2.....	215
7.2	Lösungen zum Kapitel 3.....	223
7.3	Lösungen zum Kapitel 4.....	228
7.4	Lösungen zum Kapitel 5.....	230
7.5	Lösungen zum Kapitel 6.....	232
	Literaturverzeichnis	237
	Sachverzeichnis	239