

INHALT

Vorwort	9
Zur Einführung	11

ERSTER TEIL. DIE ZAHLEN

Erster Abschnitt. Das System der Zahlen	23
<i>Einleitung.</i> Das Zählen	23
A. Der Ausgang vom Leben	23
B. Das Problem der Zählbarkeit	25
C. Die Abstraktion	27
D. Nicht „Veranschaulichung“, sondern Handeln	29
<i>1. Kapitel.</i> Die natürlichen Zahlen	31
<i>Einleitung.</i> Zahlen und Ziffern. Das Unendliche	31
I. Die Gleichheit	31
1. Zählzeichen, Ziffern, Zahlen 31 – Exkurs. Zahlennotierungen 34 – 2. Drei Zahlen. Komparativität 35	
II. Das Unendliche	40
III. Der Aufbau der Ziffern	43
IV. Die Zahlwörter	44
A. Die Addition	46
I. Kommutativität	47
II. Assoziativität	51
III. Rechtseindeutigkeit	52

B. Die Subtraktion (vorläufig; ohne negative Zahlen)	53
C. Die Multiplikation	56
I. Kommutativität	59
II. Assoziativität	60
III. Rechtseindeutigkeit	61
IV. Distributivität	62
D. Die Division (vorläufig; ohne Bruchzahlen)	63
E. Das Potenzieren	66
F. Das Radizieren und Logarithmieren (vorläufig; ohne irrationale Zahlen)	68
2. Kapitel. Die Erweiterung des Zahlenbereiches durch die unbeschränkte Ausführung der Umkehr-Operationen	71
A. Die unbeschränkte Subtraktion	71
I. Die negativen Zahlen	71
II. Das Rechnen mit negativen Zahlen	77
1. Addition und Subtraktion 77 – 2. Multiplikation und Division 81	
B. Die unbeschränkte Division	85
I. Die Bruchzahlen	85
II. Das Rechnen mit Bruchzahlen	91
1. Addition und Subtraktion 95 – 2. Multiplikation und Division 96	
C. Das Potenzieren mit negativen und gebrochenen Exponenten	102
I. Das Potenzieren als Setzen von Faktoren	102
II. Das Rechnen mit negativen und gebrochenen Exponenten	104
1. Negative Exponenten 104 – 2. Gebrochene Exponenten 105	
III. Das „Heruntertransponieren“ von Operationen durch das Rechnen mit Logarithmen	106

3. Kapitel. Der Aufbau des Zahlensystems	109
A. Die ganzen Zahlen	109
B. Die rationalen Zahlen	110
I. Der Zahlenstrahl	110
II. Die Dezimalbrüche	114
C. Die reellen Zahlen	117
D. Die imaginären Zahlen	122
E. Übersicht über das Zahlensystem	123
F. Schlußbemerkung. „Natürliche“ Zahlen?	124
Zweiter Abschnitt. Zahlenstrukturen	127
A. Was sind Strukturen?	127
B. Die wichtigsten Strukturen	130
I. Strukturen mit nur <i>einer</i> Verknüpfung $+$	130
Die Gruppe 130	
II. Strukturen mit <i>zwei</i> Verknüpfungen $+$ und \cdot	131
1. Der Ring 131 – 2. Der Körper 131	

ZWEITER TEIL. DIE MENGEN
(MATHEMATISCHE MENGENLEHRE)

1. Kapitel. Die Einführung der Mengen	135
A. Variable	135
B. Von Termen zu Funktionen	138
I. Terme	138
II. Zu Funktionen durch Abstraktion aus Termen	138

C. Von Formeln zu Mengen	143
I. Formeln	143
II. Zu Mengen durch Abstraktion aus Formeln	144
D. Mathematische und außermathematische Mengenlehre	147
2. Kapitel. Das „Rechnen“ mit Mengen	149
A. Die Teilmengen-Beziehung	150
I. Untermenge und Obermenge	150
II. Mengen-Reflexivität und leere Menge	151
III. Die Potenzmenge	151
B. Die „Summen“mengen-Beziehung	153
I. Der Durchschnitt	153
II. Die Vereinigung	154
Exkurs. Zugehörigkeitstabeln	155
III. Das Rechnen mit Summenmengen	158
1. Kommutativität 158 – 2. Assoziativität 159 – 3. Distribu-	
tivität 162	
C. Die Differenzmengen-Beziehung	167
I. Die Komplementmenge	170
II. Die Restmenge	173
III. Das Rechnen mit Differenzmengen	174
1. Idempotenz, leere Menge, Kommutativität, Distributivität 174	
– 2. Die Boolesche Summe 176 – 3. Die beiden de Morganschen	
Gesetze 176	
Anmerkungen	180
Literaturverzeichnis	181