

Geleitwort	8
Vorwort	10

1. Einige logische Grundlagen.	13
1.1. Aussagen, Aussageformen	13
1.2. Gewinn neuer Aussagen aus gegebenen Aussagen, Aussageverbindungen	17
1.2.1. Die Verneinung	18
1.2.2. Die Konjunktion	18
1.2.3. Die Alternative	19
1.2.4. Die Disjunktion	20
1.2.5. Die Implikation	20
1.2.6. Die Äquivalenz	22
1.3. Über das Begründen von mathematischen Aussagen	24
1.4. Aufgaben	26

2. Mengen	28
2.1. Der Mengenbegriff	28
2.2. Teilmengen	33
2.3. Komplementärmengen.	35
2.4. Mengen im Mathematikunterricht	36
2.5. Operationen mit Mengen	40
2.5.1. Durchschnitt von Mengen	40
2.5.2. Vereinigungsmenge	44
2.5.3. Differenzmenge	47
2.6. Etwas aus der Mengenalgebra	48
2.7. Gesetze der Differenzbildung	51
2.8. Mengen verschiedener Stufen	54
2.9. Geordnete Paare, Kreuzprodukt	56
2.10. Antinomien der Mengenlehre	59
2.11. Aufgaben	63

3.	Relationen	68
3.1.	Der Relationsbegriff	68
3.2.	Mehrstellige Relationen	90
3.3.	Eigenschaften zweistelliger Relationen	93
3.3.1.	Reflexivität	93
3.3.2.	Transitivität	95
3.3.3.	Symmetrie	96
3.4.	Ordnungsrelationen	98
3.5.	Äquivalenzrelationen	102
3.6.	Aufgaben	112

4.	Abbildungen, Funktionen	117
4.1.	Abbildung von Mengen, der Funktionsbegriff	117
4.2.	Umkehrung von Abbildungen	124
4.3.	„Zahl-Zahl“-Funktionen	125
4.4.	Eigenschaften von Funktionen	136
4.4.1.	Umkehrbarkeit	136
4.4.2.	Periodizität	136
4.4.3.	Monotonie	140
4.4.4.	Beschränktheit	142
4.4.5.	Stetigkeit	142
4.5.	Verkettung von Abbildungen	149
4.6.	Zusammensetzung von Funktionen	151
4.7.	Transformationen der Ebene	156
4.7.1.	Translation	158
4.7.2.	Rotation	159
4.7.3.	Axiale Symmetrie	161
4.8.	Umkehrung von Funktionen	166
4.9.	Geregelte Mengen, Isomorphie	171
4.10.	Aufgaben	178

5.	Aufbau der Zahlenbereiche	182
5.1.	Natürliche Zahlen – Mengentheoretischer Aufbau des Bereichs der natürlichen Zahlen	183
5.1.1.	Mengenvergleich, Kardinalzahlen	183
5.1.2.	Endliche Mengen	186
5.1.3.	Die Nachfolgerrelation für natürliche Zahlen	190
5.1.4.	Ordnung	193
5.1.5.	Rechenoperationen	196
5.2.	Natürliche Zahlen – Axiomatischer Aufbau des Bereichs der natürlichen Zahlen	202
5.2.1.	Rechenoperationen	206
5.2.2.	Ordnung	209
5.2.3.	Rechenoperationen verschiedener Stufen	211
5.3.	Gebrochene Zahlen	212
5.3.1.	Paare natürlicher Zahlen	215
5.3.2.	Quotientengleichheit	215

5.3.3. Einführung einer Ordnung	216
5.3.4. Rechenoperationen	218
5.4. Rationale Zahlen	225
5.4.1. Paare gebrochener Zahlen	226
5.4.2. Differenzungleichheit	227
5.4.3. Ordnung der rationalen Zahlen	228
5.4.4. Rechenoperationen	230
5.4.5. Monotoniegesetze in R	234
5.5. Reelle Zahlen	237
5.5.1. Allgemeines	237
5.5.2. Intervallschachtelung	243
5.5.3. Fundamentalfolgen	246
5.5.4. Reelle Zahlen als unendliche Dezimalbrüche	247
5.5.5. Erzeugung der reellen Zahlen durch Schnitte	249
5.5.6. Axiomatische Methode	250
5.6. Komplexe Zahlen	255
5.6.1. Rechenoperationen	257
5.7. Rückblick	259
5.8. Aufgaben	261

6. Vergleich unendlicher Mengen	264
6.1. Kardinalzahlen	267
6.1.1. Rechnen mit Kardinalzahlen	292
6.2. Ordinalzahlen	293
6.2.1. Ähnlichkeit von geordneten unendlichen Mengen	296
6.2.2. Ordnungstypen	298
6.2.3. Summe von Ordnungstypen	299
6.2.4. Wohlordnung, Ordnungszahl	301
6.3. Aufgaben	309

7. Anwendungen von Mengen im Schulstoff	311
7.1. Anwendungen in der Gleichungslehre	311
7.1.1. Lösen von Gleichungen und Ungleichungen	313
7.1.2. Identitäten	320
7.1.3. Unerfüllbare Gleichungen und Ungleichungen	321
7.1.4. Äquivalente Umformungen	324
7.2. Punktmengen	329
7.3. Weitere Anwendungen von Mengen und Relationen im Schulunterricht	338
7.4. Aufgaben	340

8. Lösungen	342
Literaturverzeichnis	384
Sachwortverzeichnis	387